

Première partie

Accélérographe mécanique

Le but du problème est d'étudier un accélérographe construit à l'aide d'un oscillateur mécanique.

Les deux parties sont largement indépendantes.

Dans tout le problème on prendra pour l'intensité du champ de pesanteur terrestre $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

I Étude sommaire

Dans un référentiel \mathcal{R} galiléen muni du repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on considère un corps solide (\mathcal{S}) de masse $m = 0,1 \text{ kg}$ et de centre d'inertie G pouvant se déplacer sans frottement solide le long de l'axe horizontal Ox (cf. figure 1); G est relié au point E par un ressort de raideur k ; (\mathcal{S}) est en outre soumis à une force de frottement visqueux de la forme $-\beta \vec{v}(G)$ où $\vec{v}(G)$ est la vitesse de G par rapport à E .

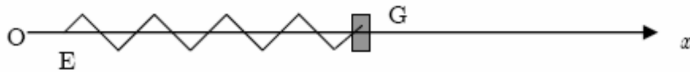


Figure 1

On repère la position de G par l'écart à la position d'équilibre ℓ_0 par la relation $x = EG - \ell_0$.

1. Détermination des caractéristiques de l'oscillateur

Dans un premier temps, E est fixe en O .

On écarte G de sa position d'équilibre vers la droite, d'une distance $x_0 = 10 \text{ cm}$

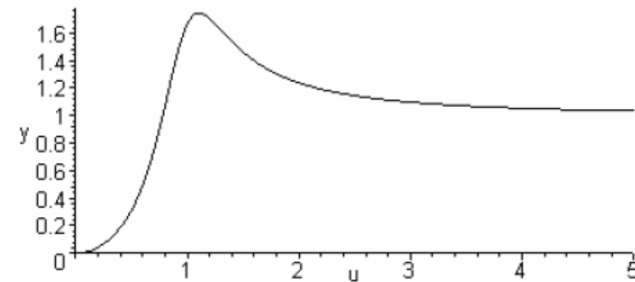
et on le lâche sans vitesse initiale.

1. Déterminer l'équation du mouvement ; on posera $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $2\lambda = \frac{\beta}{m}$.
2. Déterminer $x(t)$ dans le cas d'un régime pseudo-périodique.
3. La durée séparant 10 passages de G par la position d'équilibre, de droite à gauche, est $\Delta t = 12 \text{ s}$. Par ailleurs, l'amplitude de la dixième oscillation est $x_1 = 7,5 \text{ cm}$.
En déduire les valeurs de la pseudo pulsation, de β et de k .

2. Mesure d'une accélération

Dans cette question le point E est solidaire d'un solide en vibration dans \mathcal{R} . Sa position est donnée par $\vec{OE}(t) = a \cos(\omega t) \vec{e}_x$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
2. Déterminer $x(t)$ en régime forcé (ou permanent).
3. Le tracé de l'amplitude X_0 des oscillations en fonction de la pulsation a l'allure suivante en coordonnées réduites $y = \frac{X_0}{a}$ en fonction de $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.



Que représente le maximum de cette courbe ? Cette situation se présente-t-elle pour toute valeur du coefficient d'amortissement ? Déduire graphiquement l'amplitude a dans le cas où, pour $\omega = 7 \text{ rad.s}^{-1}$ on mesure $X_0 = 0,2 \text{ m}$.

4. Exprimer puis calculer la puissance moyenne dissipée par les frottements.

3. Accélération radiale d'un satellite.

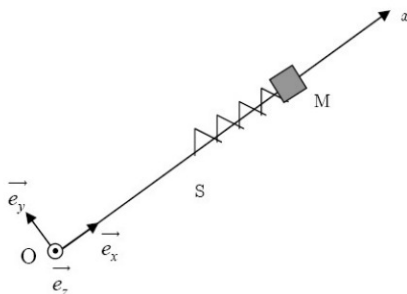
Extrait de CCP 2008 filière MP :

Un satellite, de masse m_s , de centre d'inertie S , est en orbite circulaire autour de la terre de centre O . Sa période est $T_0 = 12$ h. Dans ce satellite un point matériel M de masse $m = 100$ g peut se déplacer sans frottements sur un axe Sx , fixe dans le satellite (cf. figure suivante). En outre M est soumis à une force élastique qui dérive d'une énergie potentielle

$$E_p(x) = \frac{1}{2}m\omega_1^2x^2$$

avec $\omega_1 = 0,03$ rad.s⁻¹ et $\overrightarrow{SM} = x\vec{e}_x$.

Rayon de la terre $R = 6400$ km ; $g = 9,8$ m.s⁻² intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la terre.



On pose $r_o = OS$ et on désigne par \mathcal{R}_S le référentiel lié au satellite muni du repère cartésien $(S, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Le référentiel \mathcal{R}_g géocentrique est supposé galiléen.

1. (a) Déterminer la vitesse v_o du satellite en fonction de r_o , g et R .
 (b) En déduire l'expression de T_0 en fonction de r_o , g et R . Calculer numériquement r_o , v_o et la vitesse angulaire ω_o du satellite dans \mathcal{R}_g .
2. On étudie le mouvement de M dans le référentiel \mathcal{R}_S .
 (a) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

- (b) Donner une équation du mouvement approchée en considérant que $x \ll r_o$, en ne faisant intervenir que ω_o , ω_1 , x et ses dérivées temporelles.
- (c) Montrer que M oscille et que sa période d'oscillation n'est quasiment pas affectée par la révolution du satellite.
- (d) Pourquoi ce dispositif est-il pertinent pour mesurer, s'il y a lieu, l'accélération radiale du satellite ?