Champ électrostatique

I Le champ électrostatique

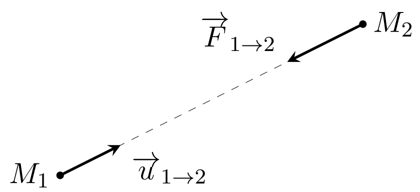
I.1 La loi de Coulomb et le principe de superposition

a La loi de Coulomb

La loi de Coulomb exprime, en électrostatique, la force de l'interaction électrique entre deux particules chargées électriquement. Elle est nommée d'après le physicien français Charles-Augustin Coulomb qui l'a énoncée en 1785 et elle forme la base de l'électrostatique. Elle peut s'énoncer ainsi :
≪ L'intensité de la force électrostatique entre deux charges électriques est proportionnelle au produit des deux charges et est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux charges. La force est portée par la droite passant par les deux charges. ≫

Viéo sur la balance de Coulomb.

On considère deux charges ponctuelles immobiles situées en M_1 et M_2, de charge respective q_1 et q_2 :



La force électrostatique exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 est de la forme :

$$\overrightarrow{F_{1\to2}} = k\frac{q_1q_2}{M_1M_2^3}\overrightarrow{M_1M_2} = k\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\overrightarrow{u}_{1\to2}$$

k constante universelle dépendant des unités.

Cette loi décrit une interaction attractive ou répulsive suivant les signes des charges.

On a aussi, d'après la troisième loi de Newton, :

$$\overrightarrow{F}_{2\to1} = -\overrightarrow{F}_{1\to2} = k\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\overrightarrow{u}_{2\to1}.$$

On peut remarquer le rôle analogue des charges.

Dans le vide :

$$\boxed{\textbf{Loi de Coulomb : } \overrightarrow{F}_{1\to2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\overrightarrow{u}_{1\to2}}$$

avec ϵ_0 **permittivité diélectrique du vide :** $\epsilon_0 = 8,85\cdot10^{-12}$ $\mathrm{C^2.s^2.kg^{-1}.m^{-3}}$ ou $\mathrm{F.m^{-1}}$
On a

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\cdot10^9\ \mathrm{F^{-1}.m}$$

Remarque : Dans un milieu matériel, il faut remplacer ϵ_0 par la permittivité du matériau $\epsilon = \epsilon_r\cdot\epsilon_0$ avec ϵ_r permittivité relative du matériau.
Dans l'air, $\epsilon \simeq \epsilon_0$ quasiment comme dans le vide.
Dans l'eau, $\epsilon_r \simeq 80$ en régime permanent, cette grande valeur affaiblit donc l'interaction entre les ions ce qui explique que l'eau est un solvant dissociant.

b Principe de superposition

Soit $\mathcal{D}$ une distribution de N charges ponctuelles $\{q_i; M_i\}$ et $\overrightarrow{F}(P)$ la force électrostatique exercée par cette distribution de charges sur une charge q placée en P.

$\overrightarrow{F}(P)$ est égale à la somme des forces qu'exercerait chaque charge prise séparément :

$$\overrightarrow{F}(P) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i}(P) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q q_i \frac{\overrightarrow{M_i P}}{M_i P^3}.$$

I.2 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

D'après la loi de Coulomb la force subie par la charge q_2 en présence de la charge q_1 est de la forme :

$$\overrightarrow{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \overrightarrow{u}_{1\to 2}.$$

On peut aussi l'écrire :

$$\overrightarrow{F}_{1\to 2} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \overrightarrow{u}_{1\to 2} = q_2 \cdot \overrightarrow{E}_1(M_2)$$

où $\overrightarrow{E}_1(M_2)$ est le **champ électrostatique créé par la charge** q_1 **au point** M_2 dans le vide.

$\overrightarrow{E}_1(M)$ constitue le **champ électrostatique** ayant pour source q_1.

Le champ électrostatique créé en un point P de l'espace par une charge ponctuelle q immobile au point origine O d'un repère sphérique a pour expression :

$$\overrightarrow{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{OP}}{OP^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \overrightarrow{u}_r.$$

Ce champ est radial et décroît en $1/r^2$.

Unité : $\|\overrightarrow{E}\|$ en V/m ou N/C.

Schéma : Champ créé par une charge ponctuelle positive et une charge ponctuelle négative.

Définition : On appelle **ligne de champ** une courbe qui est tangente en tout point au champ.

Exemple : les lignes de champ du champ électrique créé par une charge ponctuelle sont les demi-droites dont l'origine est la charge, orientée depuis une charge $q > 0$ mais se dirigeant vers $q < 0$.

Illustrations : Champ électrique créé par des charges ponctuelles

Sites de Geneviève Tulloue : Lignes de champ créé par une distribution de charge et équipontielles

Application : dans un atome d'hydrogène, évaluer l'ordre de grandeur du champ électrique créé par le noyau sur l'électron. On supposera que la distance typique électron-noyau vaut $a_0 \simeq$ ....

....

....

....

....

....

I.3 Champ électrostatique créé par une distribution de charges

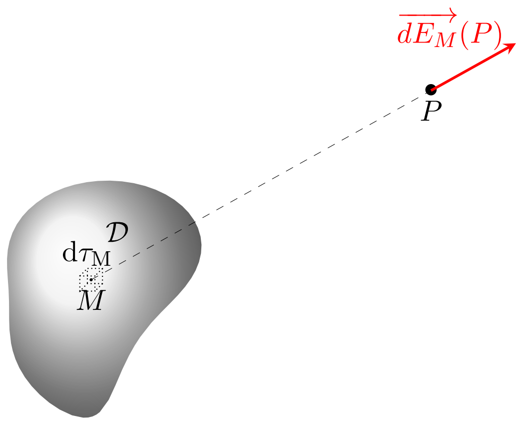
a Distribution de charges ponctuelles

Pour une distribution $\mathcal{D}$ de N charges ponctuelles $\{q_i; M_i\}$, on peut appliquer le principe de superposition : le champ électrostatique créé en P par cette distribution de charges est la somme des champs créées par chacune des charges :

$$\overrightarrow{E}_{\mathcal{D}}(P) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{E_i}(P) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_iP}}{M_iP^3} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u}_{M_i \to P}}{M_iP^2}$$

Attention : SOMME VECTORIELLE !

b Distribution volumique



On considère $\mathcal{D}$ une distribution volumique de charge $\{\rho(M); M \in \mathcal{V}\}$.
Un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{M}}$ porte la charge élémentaire δq telle que :

$$\delta q = \rho(M)\mathrm{d}\tau_{\mathrm{M}}.$$

Cette charge élémentaire δq au point M crée en P un champ élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{E_M}(\mathrm{P})$ tel que :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{E_M}(\mathrm{P}) = \delta\mathrm{q}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{MP}}{\mathrm{MP}^3} = \rho(\mathrm{M})\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{MP}}{\mathrm{MP}^3}\mathrm{d}\tau_{\mathrm{M}}.$$

Pour obtenir le champ créé par la distribution de charges $\mathcal{D}$, d'après le principe de superposition il suffit de sommer les $\mathrm{d}\overrightarrow{E_M}(\mathrm{P})$ sur tous les petits éléments de volume $\mathrm{d}\tau$ contenus dans $\mathcal{V}$:

$$\boxed{\overrightarrow{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{M\in\mathcal{V}} \rho(M)\frac{\overrightarrow{MP}}{MP^3}\mathrm{d}\tau_{\mathrm{M}}}$$

Attention : SOMME VECTORIELLE !

Remarque : $\overrightarrow{E}$ est défini et continu pour toute distribution volumique de charge où ρ est bornée.

II Le potentiel électrostatique

II.1 À propos de la force électrostatique

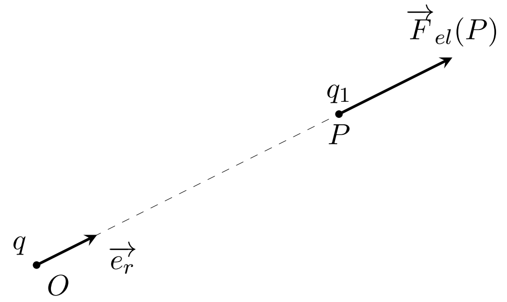
Rappel : **La force électrostatique est une force conservative**. Le travail de cette force entre deux positions de l'espace ne dépend pas du chemin suivi, ni de la façon dont on le parcourt mais uniquement des deux positions.

Il existe une énergie potentielle associée à la force électrostatique telle que :

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_{p,el}$$

Cas d'une charge ponctuelle q en O

On considère une charge ponctuelle q, fixe en O. Une seconde charge q_1 placée en P subit la force $\overrightarrow{F_{el}}$. Cette force est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,el}$.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,el}(P) = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

II.2 Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

Comme pour la distinction entre force et champ, l'énergie potentielle de la charge q_1 dans le champ électrique créé par la charge q s'écrit $q_1\times$ (grandeurs indépendantes de q_1). On peut définir ainsi le potentiel électrique

V créé en P par une charge q en O :

$$\mathcal{E}_{p,el}(P) = q_1 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = q_1 V(P)$$

Le potentiel électrostatique créé en un point P de l'espace par une charge ponctuelle q immobile au point origine O d'un repère sphérique a pour expression :

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

avec $r = OP$.
Unité : V en volts (V).

II.3 Potentiel créé par une distribution de charges

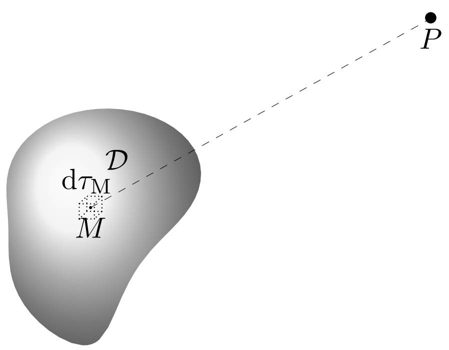
Principe de superposition : la résultante d'un ensemble de forces est la somme de ces forces. De même l'énergie potentielle résultante est la somme des énergies potentielles. Ce résultat se généralise au champ électrique et au potentiel créés par une répartition quelconque de charges.

a Potentiel créé par une distribution de charges ponctuelles

On considère une distribution $\mathcal{D}$ de N charges ponctuelles : $\mathcal{D} = \{q_i; M_i; i \in [\![1; N]\!]\}$.
D'après le principe de superposition on a :

$$V(P) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 M_i P}.$$

b Potentiel créé par une distribution continue de charges



$\mathrm{d^3V_M(P)}$ = potentiel électrostatique élémentaire créé par la charge δq portée par le volume élémentaire $\mathrm{d}\tau_\mathrm{M}$ centré sur M :

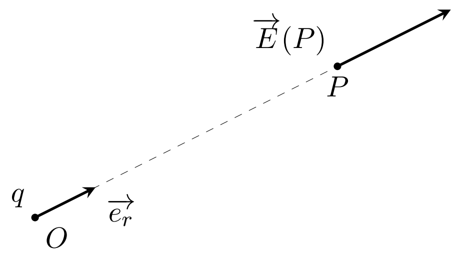
$$\mathrm{d^3V_M(P)} = \frac{\rho(\mathrm{M})\mathrm{d}\tau_\mathrm{M}}{4\pi\epsilon_0 \mathrm{MP}}.$$

$V(P)$ = potentiel électrostatique créé par la distribution de charges $\mathcal{D} = \{\rho(M); M \in \mathcal{V}\}$:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{M\in\mathcal{V}} \frac{\rho(M)}{MP} \mathrm{d}\tau_\mathrm{M}$$

II.4 Circulation du champ électrostatique

a Une propriété de $\vec{E}$



Soit $\overrightarrow{E}$ le champ créé par une charge ponctuelle q placée au point O :

$$\overrightarrow{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e}_r.$$

Avec $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{e}_r$.

Une charge q_1 placée en P subit la force $\overrightarrow{F_{el}} = q_1\overrightarrow{E}(P)$. Cette force est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle

$$\mathcal{E}_{p,el} = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Circulation du champ $\overrightarrow{E}$:

  Soit une courbe orientée Γ. On appelle circulation $\mathcal{C}$ du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(P)$ le long de Γ l'intégrale :

  $$\mathcal{C} = \int_{P\in\Gamma} \overrightarrow{E}(P).\mathrm{d}\overrightarrow{OP}$$

  où P parcourt la courbe Γ dans le sens de son orientation.

  Soit $\delta\mathcal{C}$ la circulation élémentaire du champ $\overrightarrow{E}$. Par définition :

  $$\delta\mathcal{C} = \overrightarrow{E}(P).\mathrm{d}\overrightarrow{OP} = \frac{\mathrm{q}}{4\pi\epsilon_0\mathrm{r}^2}\overrightarrow{e}_\mathrm{r}.(\mathrm{dr}\overrightarrow{e}_\mathrm{r} + \mathrm{rd}\overrightarrow{e}_\mathrm{r}) = \frac{\mathrm{q}}{4\pi\epsilon_0\mathrm{r}^2}\mathrm{dr}.$$

  Circulation pour aller de A à B :

  $$\mathcal{C}_{AB} = \int_A^B \delta\mathcal{C} = \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{dr} = \frac{\mathrm{q}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-1}{\mathrm{r}}\right]_{\mathrm{r_A}}^{\mathrm{r_B}}$$

  $$\mathcal{C}_{AB} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

  $\mathcal{C}_{AB}$ ne dépend que des points A et B et ne dépend pas du chemin suivi.

- Propriété de $\overrightarrow{E}$: **Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ est à circulation conservative.**

- Conséquence : $\mathcal{C}_{A\rightarrow B=A} = 0$ ou $\oint\mathcal{C} = 0$.

b Définition du potentiel V

Par définition, la circulation élémentaire du champ électrostatique est égale à l'opposée de la différentielle de la grandeur V : potentiel électrostatique.

$$\delta\mathcal{C} = \overrightarrow{E}(P).\mathrm{d}\overrightarrow{OP} = -\mathrm{dV(P)}.$$

ou

$$\mathrm{dV} = -\frac{\mathrm{q}}{4\pi\epsilon_0 \mathrm{r}^2}\mathrm{dr}$$

soit

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{constante.}$$

Il n'y a pas de charges à l'infini, on prend $V(\infty) = 0 =$constante.

V, potentiel électrique créé par la charge ponctuelle q a pour expression :

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

Remarque : un champ vérifiant la propriété $\delta\mathcal{C} = -\mathrm{dV}$ est dit champ de gradient et on peut écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V}$$

En effet, par définition du gradient, $\mathrm{dV} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{V}).\mathrm{d}\overrightarrow{OP}$.

Le potentiel s'exprime en $\mathrm{C.F^{-1}}$ ou volts (V).

c Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Rappel : on appelle **ligne de champ** une courbe tangente en chacun de ses points P au champ $\overrightarrow{\mathbf{E}}(P)$
On a

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OP} = \alpha(\mathrm{P}) \cdot \overrightarrow{E}(\mathrm{P}).$$

Elle vérifie les propriétés suivantes :

- ⋆ Les lignes de champ électrostatique divergent à partir des charges positives et convergent vers les charges négatives.
- ⋆ Lorsqu'il est défini, le champ électrostatique est nul au point d'intersection de deux lignes de champ (deux lignes de champ ne peuvent donc se couper que si $\overrightarrow{E}(P) = 0$ ou $\overrightarrow{E}(P)$ non défini).
- ⋆ Les lignes de champ électrostatique d'une distribution
  - — partent à l'infini si la distribution est globalement positive
  - — proviennent de l'infini si la distribution est globalement négative
  - — n'aboutissent ni ne proviennent de l'infini si la distribution est globalement neutre.

Définition : une **surface équipotentielle** est une zone de l'espace où le potentiel électrique est homogène (constant).

Propriétés

- Deux surfaces équipotentielles ne peuvent pas se couper.
- Lignes de champ et équipotentielles : le champ électrostatique est perpendiculaire aux équipotentielles (ou les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentielles).

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

- Orientation des lignes de champ : les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Conséquence : **une ligne de champ ne peut pas être une courbe fermée**.

Application : Champ créé par une charge ponctuelle et par un condensateur, surfaces équipotentielles.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

d Rotationnel du champ électrostatique

Considérons un contour orienté Γ et la surface orientée Γ dont $\mathcal{C}$ est le contour. La circulation du champ électrostatique le long du contour fermé Γ a pour expression :

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$$\boxed{\oint_\Gamma \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{d\ell} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \exists V \text{ tel que } \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V}}$$

III Invariances et symétries du champ électrostatique

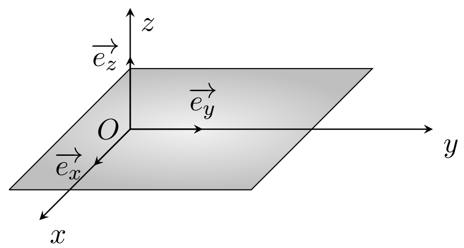
III.1 Invariance des distributions de charge

a Invariance par translation

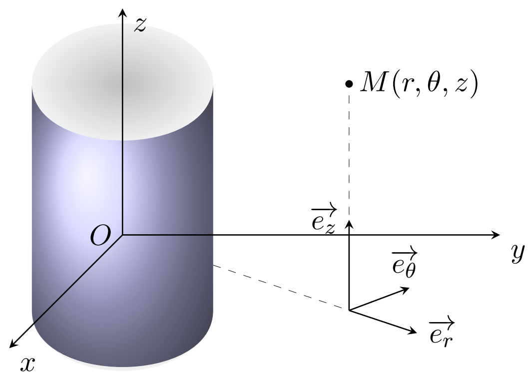
Une distribution de charge est **invariante par translation** si, après avoir effectué la dite translation, on retrouve la même distribution. Autrement dit : si, pour tout point M et son translaté M', la densité de charge vérifie $\rho(M) = \rho(M')$.

Conséquence : la distribution de charge doit être infinie pour pouvoir être invariante par translation.

Exemples :
- Le plan infini uniformément chargé :



- Le cylindre infini :



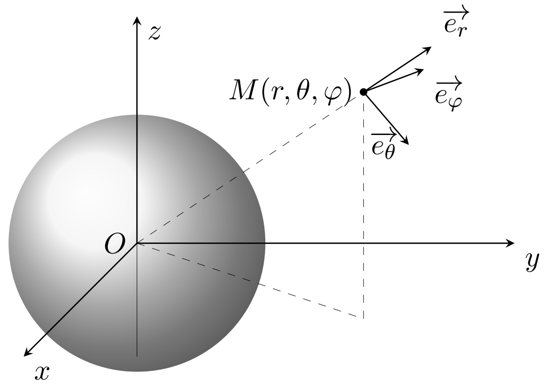
b Invariance par rotation

Une distribution de charge est **invariante par rotation** d'un angle θ autour d'un axe Δ si, après avoir effectué la dite rotation, on retrouve la même distribution.

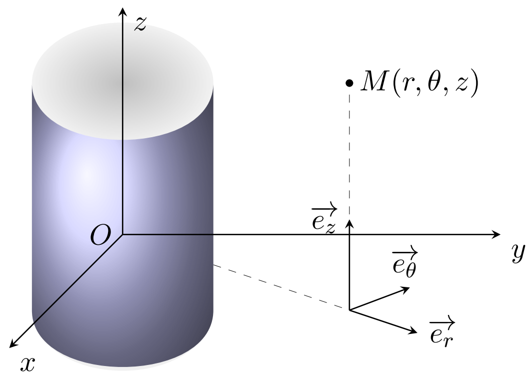
Soit M un point quelconque de la distribution et M' l'image de M par la rotation, on doit avoir $\rho(M) = \rho(M')$.

Exemples :

- La sphère uniformément chargée :



- Le cylindre infini :



c Remarque

Les invariances des distributions de charge impliquent un choix adapté des coordonnées à employer.

III.2 Invariances, symétries et propriétés du champ électrostatique

a Principe de Curie

Les éléments d'invariance et de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

Dans notre étude ici présente : les invariances et symétries des distributions de charges (sources du champ $\overrightarrow{E}$) se retrouvent dans $\overrightarrow{E}$.

b Invariances

Un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ possède les mêmes propriétés d'invariance que la distribution de charges qui en est sa source.

- Invariance par translation.

Si la distribution de charge est **invariante par toute translation** le long d'un axe (Oz) alors le champ $\overrightarrow{E}$ ne dépend pas de z. En effet, la distribution de charge étant invariante pour toute translation suivant l'axe Oz, on a :

$$\forall a, \quad \rho(\alpha, \beta, z) = \rho(\alpha, \beta, z + a)$$

On peut donc écrire $\rho(\alpha, \beta, z) = \rho(\alpha, \beta)$. De même pour le champ électrostatique :

$$\forall a, \quad \overrightarrow{E}(\alpha, \beta, z) = \overrightarrow{E}(\alpha, \beta, z + a) = \overrightarrow{E}(\alpha, \beta).$$

Exemples : le fil ou le cylindre rectilignes infinis uniformément chargés, le plan infini uniformément chargé.

- Invariance par rotation.

Si la distribution de charge est **invariante par toute rotation d'angle θ autour de l'axe Δ** alors, en coordonnées cylindriques d'axe Δ, $\overrightarrow{E}$ ne dépend pas de θ.

$$\forall \alpha, \quad \overrightarrow{E}(P) = \overrightarrow{E}(r, \theta, z) = \overrightarrow{E}(r, \theta + \alpha, z) = \overrightarrow{E}(r, z).$$

Une telle distribution de charge est à symétrie cylindrique.

Exemples : le fil ou le cylindre rectilignes uniformément chargés, le disque, le cercle...

On peut aussi avoir une distribution de charge invariante par toute rotation autour d'un point fixe O. On utilisera alors les coordonnées sphériques et le champ $\overrightarrow{E}$ ne dépendra que de r distance au point O.

Une telle distribution de charge est dite à symétrie sphérique.

Exemples : boule et sphère uniformément chargées.

c Symétries des sources par rapport à un plan

On appelle **plan de symétrie** Π^+ d'une distribution de charge, un plan tel que la distribution obtenue en déplaçant les charges selon une symétrie par rapport à ce plan est identique à la distribution initiale.

Une distribution est symétrique par rapport à un plan Π^+ si, pour tout point M de la distribution de charges, il existe un symétrique M', et si sa densité de charge vérifie

$$\rho(M) = \rho(M')$$

On appelle **plan d'antisymétrie** Π^- d'une distribution de charge, un plan tel que la distribution obtenue en déplaçant les charges selon une symétrie par rapport à ce plan est opposée à la distribution initiale.

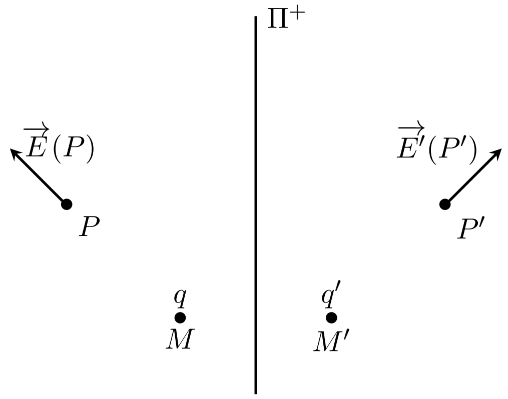
Une distribution est antisymétrique par rapport à un plan Π^- si, pour tout point M il existe un symétrique M', et si sa densité de charge vérifie

$$\rho(M) = -\rho(M')$$

d Propriétés de symétrie du champ électrostatique

Cas d'une distribution de charge possédant un plan de symétrie :

- On considère une charge q placée en M et un point P où on cherche le champ électrostatique. Cette charge q placée en M a pour image, par symétrie par rapport au plan Π^+ une charge q' placée en M' avec $q = q'$ et M' symétrique de M par rapport à Π.



q crée au point P le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(P)$:

$$\overrightarrow{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{MP^3}\overrightarrow{MP}.$$

q' crée en P' le champ électrostatique $\overrightarrow{E'}(P')$:

$$\overrightarrow{E'}(P') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{M'P'^3}\overrightarrow{M'P'}.$$

L'invariance de la charge s'écrit $q = q'$ et la transformation est une isométrie :

$$\text{soit } q = q' \quad \text{et} \quad MP = M'P'$$

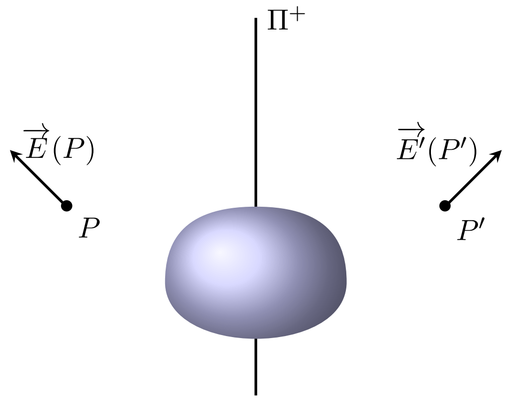
d'où :

$$\overrightarrow{E'}(P') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{MP^3}\overrightarrow{M'P'}.$$

Le champ électrostatique se transforme comme le vecteur $\overrightarrow{MP}$ et

$$\overrightarrow{E'}(P') = sym_{\Pi^+}(\overrightarrow{E}(P)).$$

- Soit $\mathcal{D}$ une distribution de charge admettant Π^+ comme plan de symétrie.



On note $\overrightarrow{E'}$ le champ créé par la distribution $\mathcal{D}'$ symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à Π^+.
Π^+ étant un plan de symétrie de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$ sont identiques et on a :

$$\overrightarrow{E'}(P') = \overrightarrow{E}(P').$$

Or on a $\overrightarrow{E'(P')} = sym_{\Pi}^+(\overrightarrow{E}(P))$. On obtient donc que :

$$\boxed{\overrightarrow{E}\,(P' = sym_{\Pi^+}(P)) = sym_{\Pi}^+\left(\overrightarrow{E}(P)\right)}$$

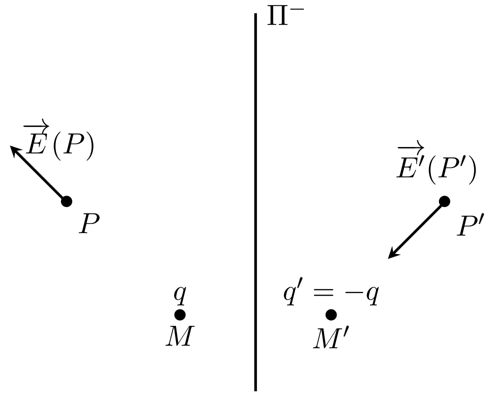
- Si P appartient à Π^+ on doit alors avoir $\overrightarrow{E}(P' = P) = sym_{\Pi^+}(\overrightarrow{E}(P))$, le champ électrostatique doit être tangent au plan Π^+.

En un point appartenant à un plan de symétrie d'une distribution de charge, le champ électrostatique créé appartient à ce plan.

Cas d'une distribution de charge admettant Π^- comme plan d'antisymétrie.

- Plan d'antisymétrie pour deux charges ponctuelles

  Une charge q placée en M a pour image une charge q' placée en M' avec $q' = -q$ et M' symétrique de M par rapport à Π^-.



q crée en un point P le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(P)$:

$$\overrightarrow{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{MP^3}\overrightarrow{MP}.$$

q' crée en P' le champ électrostatique $\overrightarrow{E'}(P')$:

$$\overrightarrow{E'}(P') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{M'P'^3}\overrightarrow{M'P'}.$$

La transformation est une isométrie :

$$MP = M'P' \text{ et } q' = -q,$$

d'où :

$$\overrightarrow{E'}(P') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{MP^3}\overrightarrow{M'P'}.$$

$$\overrightarrow{E'}(P') = -sym_{\Pi^-}\left(\overrightarrow{E}(P)\right).$$

- $\mathcal{D}$ étant une distribution de charge admettant Π^- comme plan d'antisymétrie, on a

$$\overrightarrow{E'}(P') = -\overrightarrow{E}(P').$$

  D'où

$$\overrightarrow{E}(P') = -sym_{\Pi^-}\left(\overrightarrow{E}(P)\right).$$

- Si P appartient à Π^- on doit alors avoir $\overrightarrow{E}(P'=P) = -sym_{\Pi^-}\left(\overrightarrow{E}(P)\right)$, le champ électrostatique doit être normal au plan Π^-.

En un point appartenant à un plan d'antisymétrie d'une distribution de charge, le champ électrostatique créé est perpendiculaire à ce plan.

IV Énergie électrostatique

IV.1 Énergie potentielle d'interaction.

On étudie le cas d'une charge ponctuelle q plongée dans un champ électrostatique extérieur (créé par une distribution de charges). Ce champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ dérive d'un potentiel V tel que

$$\mathrm{dV} = -\overrightarrow{E}(\mathrm{M}).\mathrm{d}\overrightarrow{OM}.$$

La charge q placée en M est soumise à la force électrostatique $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}(M)$. Lors de son déplacement élémentaire de M à M', elle reçoit le travail δW tel que :

$$\delta W = \overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{q}\overrightarrow{E}(\mathrm{M})\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{q}(-\mathrm{dV(M)}).$$

Le travail de la force électrostatique entre deux positions M_1 et M_2 s'écrit :

$$W_{1\to 2} = q(V(M_1) - V(M_2)).$$

La force électrostatique est une force conservative, elle dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ telle que :

$$\delta W = -\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p} = -\mathrm{qdV}.$$

Soit $\mathcal{E}_p(M) = qV(M) + constante$.

IV.2 Énergie potentielle d'interaction entre deux charges

On considère deux charges ponctuelles q_1 et q_2 en interaction électrostatique. Par définition l'énergie électrostatique de ce système de charges est l'énergie nécessaire à la construction de cette distribution. Ici, cela va correspondre au travail fourni par un opérateur amenant la charge q_2 de l'infini à sa position finale, en présence du champ créé par la charge q_1 :

$$W_{op} = q_2V_1(M_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2q_1}{M_1M_2} = q_1V_2(M_1).$$

On a :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}(q_1V_2(M_1) + q_2V_1(M_2)).$$

V Flux du champ électrostatique ; théorème de Gauss

V.1 Équation de Maxwell-Gauss

On a déjà vu l'**équation locale de Maxwell-Faraday** pour le champ électrostatique :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{0}}$$

Le champ électrostatique vérifie une autre équation locale, qui relie la densité volumique de charge au champ électrostatique. C'est l'**équation de Maxwell-Gauss** :

$$\boxed{\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}}$$

Application : Champ créé par un plan uniformément chargé en volume d'épaisseur a.

V.2 Théorème de Gauss

Énoncé : **le flux du champ électrostatique créé par une distribution de charges $\mathcal{D}$, à travers une surface fermée $(\mathscr{S})$, est égal à la charge de $\mathcal{D}$ située à l'intérieur de $(\mathscr{S})$ sur ϵ_0 :**

$$\Phi = \oiint_{M\in\mathscr{S}} \overrightarrow{E}(M)\cdot\overrightarrow{dS_M} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}.$$

Démonstration : théorème de Green-Ostrogradski.

Conséquence : Dans une zone sans charge, le champ électrique est à flux conservatif.
Dans les zones sans charge, le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers toute section d'un tube de champ se conserve. Lorsque les lignes de champ se resserrent, l'intensité du champ augmente.

V.3 Équation aux dérivées partielles vérifiée par le potentiel

Si on injecte la relation $\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M)$ dans l'équation de Maxwell-Gauss, on obtient (par définition du laplacien)

$$\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0$$

Cette équation est appelée **équation de la Poisson**

En absence de charge, l'équation de Poisson devient :

$$\Delta V(M) = 0$$

Équation de Laplace.

Application : Reprendre le cas du plan épais uniformément chargé en volume et calculer le potentiel créé en tout point.

VI Exemples

VI.1 Méthode générale

- Calcul de $\overrightarrow{E}$ par intégrale vectorielle :

$$\overrightarrow{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint\limits_{M\in\mathscr{D}} \rho(M)\frac{\overrightarrow{MP}}{MP^3} d\tau_M.$$

  — Étude des invariances de la distribution de charges : choix du repère d'étude, élimination de variables.
  — Étude des symétries de la distribution de charges : direction du champ $\overrightarrow{E}$ au point P.
  — Découpage de la distribution de charges puis projection du champ élémentaire sur la direction finale.
  — Intégration.

  Dans le cadre du programme cette méthode ne sera utilisée que pour des distributions discrètes de charge.

- Calcul du potentiel V par intégrale vectorielle :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint\limits_{M\in\mathscr{D}} \frac{\rho(M)}{MP} d\tau_M.$$

  — Étude des invariances de la distribution de charges : choix du repère d'étude, élimination de variables.
  — Découpage de la distribution de charges.

— Intégration.
— Calcul de $\overrightarrow{E}$ par $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$.

Dans le cadre du programme cette méthode ne sera utilisée que pour des distributions discrètes de charge.

- Calcul de $\overrightarrow{E}$ par le théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{P\in\mathscr{S}} \overrightarrow{E}(P).\overrightarrow{dS_P} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}.$$

— Étude des invariances de la distribution de charges : choix du repère d'étude, élimination de variables.
— Étude des symétries de la distribution de charges : direction du champ $\overrightarrow{E}$ au point P.
— Choix de la surface de Gauss.
— Calcul de $\overrightarrow{E}$.
— Calcul de V par $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$.

- Calcul de $\overrightarrow{E}$ par l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

— Étude des invariances de la distribution de charges : choix du repère d'étude, élimination de variables.
— Étude des symétries de la distribution de charges : direction du champ $\overrightarrow{E}$ au point P.
— Calcul de $\overrightarrow{E}$.
— Calcul de V par $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$.

- Calcul du potentiel V par l'équation de Poisson :

$$\Delta V(P) + \frac{\rho(P)}{\epsilon_0} = 0$$

— Étude des invariances de la distribution de charges : choix du repère d'étude, élimination de variables.
— Calcul de V par l'équation de Poisson (l'expression du laplacien scalaire sera fournie).
— Calcul de $\overrightarrow{E}$ par $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$.

VI.2 Cas du fil rectiligne infini uniformément chargé

Déterminer le champ créé par un cylindre infini de rayon R et densité volumique de charge ρ uniforme à l'aide du théorème de Gauss.

VI.3 Cas du plan infini uniformément chargé

Déterminer le champ créé par une surface infinie plane de densité surfacique de charge σ uniforme à l'aide du théorème de Gauss.

VI.4 Cas du condensateur plan

VI.5 Cas de la sphère uniformément chargée

VII Analogies champ électrostatique-champ gravitationnel

	Electrostatique	**Gravitation**
Source de champ en M	q_0	m_0
Particule sensible en P	q	m
Force exercée par M sur P	$\overrightarrow{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{u_{M\to P}}{MP^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ attractive ou répulsive	$\overrightarrow{F} = -\mathscr{G}mm_0\frac{u_{M\to P}}{MP^2} = -\mathscr{G}\frac{mm_0}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ attractive
Énergie potentielle	$\mathscr{E}_{p,el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}qq_0\frac{1}{r}$	$\mathscr{E}_{p,grav} = -\mathscr{G}mm_0\frac{1}{r}$
Champ créé en P par M en O	Champ électrostatique $\overrightarrow{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0}{r^2}\overrightarrow{u_r}$	Champ gravitationnel $\overrightarrow{\mathcal{G}}(P) = -\mathscr{G}\frac{m_0}{r^2}\overrightarrow{u_r}$
Constante	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-\mathscr{G}$