





Donc, en régime stationnaire  $\text{div } \vec{j}_N = 0$  ( $\frac{\partial n_{\text{vap}}}{\partial t}$ )

Soit le système = sol sec compris en  $z$  et  $z+dz$  de base  $S$ .

$$\oint_{\text{sortant}} \vec{j}_N(z) \cdot d\vec{S} = \iiint_{V \in \Sigma} \text{div } \vec{j}_N d\tau = 0$$

Optusgradskai

$$\text{or } 0 = \oint \vec{j}_N(z) \cdot \vec{e}_z dS_{\text{sortant}} = -j_N(z)S + j_N(z+dz)S$$

$$= \Phi_S(z+dz) - \Phi_S(z)$$

donc  $\frac{d\Phi_S}{dz} = 0$   $\Phi_S$  est uniforme.

Q5. Pour  $z_m(t) < z < H$ .

$$\Phi_S(z) = \text{cte} = j_N(z)S$$

$$\text{avec } \vec{j}_N = -D \text{grad } n_{\text{vap}}(z)$$

$$= -D \frac{dn_{\text{vap}}}{dz} \vec{e}_z$$

$$\text{Donc } \frac{dn_{\text{vap}}(z)}{dz} = \text{cte} = -\frac{\Phi_S}{SD} = A$$

$$n_{\text{vap}}(z) = Az + B$$

$$\text{avec } n_{\text{vap}}(z_m(t)) = Az_m(t) + B$$

$$= -\frac{\Phi_S}{SD} z_m(t) + B$$

D'où  $n_{\text{vap}}(z) = n_{\text{vap}}(z_m(t)) + \frac{\Phi_S}{SD} (z_m(t) - z)$

Q6. En  $z = z_m(t)$  on a  $\text{H}_2\text{O}_l \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O}_g$

$$\text{donc } P(z_m(t)) = P_{\text{sat}}(T) = \frac{nRT}{V}$$

$$= \frac{N_{\text{H}_2\text{O}_g} RT}{V d_A}$$

$$= d_A n_{\text{vap}}(z_m(t)) RT$$

Il vient  $n_{\text{vap}}(z_m(t)) = \frac{P_{\text{sat}}(T)}{RT} d_A$

Q7. On a donc

$$n_{\text{vap}}(z) = \frac{d_A P_{\text{sat}}(T)}{RT} - \frac{\Phi_S}{SD} (z - z_m(t))$$

Q8. D'après l'équation d'état des gaz parfaits

$$P(H) = \frac{n_{\text{vap}}(H) RT}{d_A}$$

$$P(H) = P_{\text{sat}}(T) - \frac{\Phi_S}{SD} \frac{RT}{d_A} (H - z_m(t))$$

Q9. Il doit y avoir continuité du flux des molécules d'eau à l'interface sol-atmosphère

On a donc

$$\Phi_S = h (P(H) - P_{\text{ext}}) S$$

$$\text{soit } \Phi_S = Sh [P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}}] - h \frac{\Phi_S}{D} \frac{RT}{d_A} (H - z_m(t))$$

$$\Phi_S = \frac{Sh (P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}})}{1 + \frac{RT}{D d_A} (H - z_m(t)) h}$$

Q10. Pour  $z = z_m(t)$ , entre  $t$  et  $t+dt$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \vec{z} \uparrow \\ z_m(t) \\ z_m(t+dt) \end{array} \quad \begin{array}{c} \vec{z} \uparrow \\ t \\ t+dt \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} n_{\text{vap}}(z_m(t)) \\ n_{\text{liq}} \end{array} \quad \begin{array}{c} n_{\text{vap}}(z_m(t+dt)) \\ n_{\text{liq}} \end{array} \end{array} = \frac{P_{\text{sat}}(T) d_A}{RT} \ll n_{\text{liq}}$$

$$N(t+dt) = n_{\text{vap}}(z_m(t+dt)) S dz$$

$$N(t) = n_{\text{liq}} S dz$$



Il vient,  $dN = N(t+dt) - N(t)$

$$= -m_{liq} S \cdot dz$$

$$= +m_{liq} S \frac{dz_m}{dt} dt$$

car  $dz = z_m(t) - z_m(t+dt) = -\frac{dz_m}{dt} dt$

De plus  $dN = -\delta N_s$

$$= -\Phi_s dt$$

D'où  $\frac{dz_m}{dt} = -\frac{\Phi_s}{m_{liq} S}$  ←  $T^{-1}$  ←  $L^{-1}$  (OK)

Q11. On a  $\Phi_s = -m_{liq} S \frac{dz_m}{dt}$

et  $\Phi_s = \frac{Sk (P_{sat} - P_{ext})}{1 + \frac{RTk}{Dc_A} (H - z_m(t))}$

Soit  $-m_{liq} S \frac{dz_m}{dt} = \frac{Sk (P_{sat} - P_{ext})}{1 + \frac{RTk}{Dc_A} (H - z_m(t))}$

$$\Rightarrow \frac{dz_m}{dt} \left[ 1 + \frac{RTk}{Dc_A} (H - z_m(t)) \right] = \frac{Sk (P_{sat} - P_{ext})}{m_{liq} S}$$

$$\frac{dz_m}{dt} \left[ 1 + \frac{RTk}{Dc_A} (H - z_m(t)) \right] = \frac{k (P_{sat} - P_{sat}(T))}{m_{liq}}$$

Q12. Soit  $T_{séch}$  le temps de séchage

à  $T_{séch}$   $z_m(T_{séch}) = 0$

On intègre l'expression précédente entre  $t=0$  ( $z_m(0) = H$ ) et  $T_{séch}$ :

$$-H \frac{RTk}{Dc_A} H^2 + \frac{RTk}{Dc_A} \frac{H^2}{2} = k \frac{P_{sat} - P_{sat}(T)}{m_{liq}} T_{séch}$$

$$\Leftrightarrow T_{séch} = \frac{H \left( 1 + \frac{RTk}{Dc_A} \frac{H}{2} \right)}{k (P_{sat}(T) - P_{sat})} m_{liq}$$

Q12. Il apparaît dans l'expression de  $T_{séch}$  une longueur caractéristique  $\frac{2Dc_A}{RTk}$ .

On peut poser  $H_{lim} = \frac{2Dc_A}{RTk}$

Q13. AN  $H_{lim} = \frac{2 \times 5 \times 10^{-6} \times 6,02 \times 10^{23}}{8,31 \times 300 \times 5 \times 10^{-2}}$

$$\approx \frac{6 \times 10^{18}}{4 \times 3 \times 10^{20}} \approx \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$\approx 5 \text{ mm}$

Pour  $H \ll H_{lim}$ .

$$T_{séch} = \frac{H m_{liq}}{k (P_{sat}(T) - P_{sat})} \approx H \text{ OK}$$

avec figure 3.

Le phénomène d'évaporation est déterminant

Pour  $H \gg H_{lim}$ .

$$T_{séch} = \frac{H^2}{2} \frac{RT}{Dc_A} \frac{m_{liq}}{(P_{sat}(T) - P_{sat})}$$

$H \rightarrow 1,5H$   $\frac{9}{4} = 2,25$   $\text{soit}$

## Deuxième partie

## Imagerie des nanoparticules d'or

Extrait du concours Centrale-Supélec MP 2021

I - Equation de la diffusion thermique en géométrie sphérique

Q1 Le gel entourant la sphère d'or est considéré comme homogène et infini avec une température initiale uniforme. Le système étudié est donc à symétrie sphérique.  
T ne dépend spatialement que de r.

Q2.  $\Sigma$  étudié = coquille sphérique entre r et r+dr

D'après le 1<sup>er</sup> principe entre t et t+dt  $dU = \delta Q$

$$C_g \int_{4\pi r^2 dr} \frac{\partial T}{\partial t} dt = 4\pi r^2 \int_{dr} j_h(r,t) - 4\pi (r+dr)^2 \int_{dr} j_h(r+dr, t) dt$$

Or d'après la loi de Fourier  $\vec{j}_h(r,t) = -k \text{grad} T(r,t)$   
 $= -k \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$

$$\text{Soit } C_g \int_{4\pi r^2 dr} \frac{\partial T}{\partial t} = 4\pi \left( - \frac{\partial (j_h r^2)}{\partial r} \right) dr$$

$$C_g \frac{\partial T}{\partial t} = + \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

II - Température du milieu en régime stationnaire

Q3. On a  $\frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = 0$  soit  $T(r)$

$$\text{Il vient } \left\| \frac{d^2}{dr^2} (rT(r)) = 0 \right.$$

$$\text{ou } rT(r) = Ar + B$$

$$\Leftrightarrow T(r) = A + \frac{B}{r} \quad \text{pour } r > 0.$$

$$\text{avec } T(a^+) = A + \frac{B}{a} = T_S$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} T(r) = T_0 = A$$



Soit  $B = (T_S - T_0) a$

$$T(r) = T_0 + (T_S - T_0) \frac{a}{r}$$

Q4) Soit  $P_{sph \rightarrow milieu}$  la puissance fournie au milieu par la nanosphère -

$$\begin{aligned} P_{sph \rightarrow milieu} &= 4\pi a^2 j_{th}(a) \\ &= 4\pi a^2 \left( -k \frac{\partial T}{\partial r}(a) \right) \\ &= 4\pi a^2 k \left( + (T_S - T_0) \frac{a}{a^2} \right) \end{aligned}$$

$$P_{sph \rightarrow milieu} = 4\pi a k (T_S - T_0)$$

III - Température de surface de la nanosphère -

On a  $P_{cbo}(t) = P_0 (1 + \cos \Omega t)$

Q5)  $\Sigma' = \text{nanosphère}$

D'après le premier principe entre  $t$  et  $t+dt$   
 $dU = \delta Q$

avec  $dU = C_{Au} \frac{4\pi a^3}{3} \frac{\partial T_S}{\partial t} dt$

et  $\delta Q = (P_{cbo}(t) - P_{sph \rightarrow milieu}) dt$

Il vient

$$\frac{4\pi a^3}{3} C_{Au} \frac{\partial (\delta T_S)}{\partial t} = P_0 (1 + \cos \Omega t) - 4\pi a k \delta T_S$$

$$\frac{4\pi a^3}{3} C_{Au} \frac{\partial \delta T_S}{\partial t} + \delta T_S = \frac{P_0 a}{4\pi k a}$$

$$\delta T_S + \tau \frac{\partial \delta T_S}{\partial t} = \frac{P_0 a}{4\pi k a}$$

avec  $\tau = \frac{a^2 C_{Au}}{3k}$

$$\begin{aligned} [\tau] &= \frac{L^2 [\text{énergie}] L^{-3}}{[3] [j_{th}] L^{-1}} \text{ avec } [j_{th}] L^2 = [\text{puissance}] \\ &= L^{-2} \frac{[\text{énergie}]}{[\text{puissance}]} L^2 \end{aligned}$$

$[\tau] = \text{temps}$  (ok)

Q6) On a  $\delta T_S + \tau \frac{\partial \delta T_S}{\partial t} = \frac{P_0}{4\pi k a} (1 + \cos \Omega t)$

$$\delta T_S(t) = A e^{-t/\tau} + \delta T_{S \text{ part}}$$

avec  $\delta T_{S \text{ part}} = \frac{P_0}{4\pi k a} + A \cos(\Omega t + \varphi)$

En RSF  $\delta T_S (1 + j\Omega \tau) = \frac{P_0}{4\pi k a}$

Puis simple :  
 dans injecter l'eq différentielle  
 la solution proposée -

$$\delta T_S = \frac{P_0}{4\pi k a (1 + j\Omega \tau)}$$

avec  $\Omega \tau = 1,0 \cdot 10^{-3} \ll 1$

Soit  $\delta T_S = \frac{P_0}{4\pi k a} (1 + \cos \Omega t)$  pour  $t \gg \tau$ .

$$T_S(t) = T_0 + \frac{P_0}{4\pi k a} (1 + \cos \Omega t)$$

Q7)  $\overline{\delta T_S} = \frac{P_0}{4\pi k a}$

AN  $\overline{\delta T_S} = 5,0 \text{ K}$ .

IV - Température du gel autour de la sphère -

$$T(r,t) = T_0 + \frac{\alpha}{r} \left[ 1 + e^{-\frac{r-a}{\lambda+h}} \cos\left(\Omega t - \frac{r-a}{\lambda+h}\right) \right]$$

$$\lambda + h = \sqrt{\frac{2k}{\Omega c_g}}$$



Q8)  $r_{th}$  = longueur caractéristique de la propagation de l'onde thermique dans le gel.

Considérons

Q9) On a pour  $r = a^+$

$$T(a^+, t) = T_0 + \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \alpha t)$$

$$= T_S(t) = T_0 + \frac{P_0}{4\pi k a} (1 + \cos \alpha t)$$

D'où  $\alpha = \frac{P_0}{4\pi k a}$

Q10)  $T(r, t) = T_0 + \frac{\alpha}{r} \left( 1 + e^{-\frac{r-a}{r_{th}}} \cos \left( \alpha t - \frac{r-a}{r_{th}} \right) \right)$

On considère que  $a \ll r_{th}$ .

Moyenne sur le temps :

$$\langle T(r, t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} T(r, t) dt$$

$$= T_0 + \frac{\alpha}{r}$$

$$\langle \delta T \rangle_t = \frac{\alpha}{r}$$

Moyenne sur le volume de la sphère de rayon  $r_{th}$

$$\overline{\delta T} = \frac{1}{\frac{4\pi}{3}(r_{th}^3 - a^3)} \int_{r=a}^{r=r_{th}} \langle \delta T \rangle_t 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{3}{r_{th}^3 - a^3} \int_a^{r_{th}} \alpha r dr$$

$$= \frac{3}{2} \alpha \frac{r_{th}^2 - a^2}{r_{th}^3 - a^3}$$

Pour  $a \ll r_{th}$

$$\overline{\delta T} = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{r_{th}}$$

avec  $\delta T_S = \frac{P_0}{4\pi k a}$  et  $\alpha = \frac{P_0}{4\pi k} = a \delta T_S$

Il vient  $\overline{\delta T} = \frac{3}{2} \frac{a}{r_{th}} \delta T_S$   $r_{th} = 639 \text{ nm}$

AN:  $\overline{\delta T} = 0,17 \text{ K}$

Q11) Pour révéler les faibles variations de l'indice optique du gel on peut utiliser en interférométrie de Michelson.

Troisième partie

Étude du circuit primaire d'une centrale nucléaire

Extrait de Centrale PSI 2024

Circuit primaire d'une centrale nucléaire

I - Evolution de la température dans le cœur des combustibles

1.2) Pour les  $N$  crayons  $S_{tot} = N \cdot 2\pi \frac{d}{2} H$

$$S_{tot} = N \pi d H$$

1.3) On effectue un bilan thermique pour un cylindre de combustible entre  $r$  et  $r+dr$  (longueur  $H$ )  
 D'après le 1er principe entre  $t$  et  $t+dt$   
 $dU = \delta Q + \delta W$

avec  $dU = 0$  en régime stationnaire

$$\delta Q = \Phi_{th \text{ entrant en } r} - \Phi_{th \text{ sortant en } r+dr} + P_v dr$$

$$= j_{th}(r) 2\pi r H - j_{th}(r+dr) 2\pi (r+dr) H + P_v 2\pi r dr$$

$$= - \frac{\partial r j_{th}}{\partial r} 2\pi H + P_v 2\pi r dr H$$

$$\delta W = 0$$



On a donc  $\frac{d(rj_{th})}{dr} = P_v r$

D'après la loi de Fourier  $\vec{j}_{th} = -\frac{1}{2} \text{grad } T$

D'où  $\frac{d}{dr} r \left( -\frac{1}{2} \frac{dT}{dr} \right) = P_v r$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{P_v}{\frac{1}{2}} r = 0$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{A = \frac{P_v}{\frac{1}{2}}}$$

Q3) On a  $\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = -Ar$

soit  $r \frac{dT}{dr} = -A \frac{r^2}{2} + B$

Avec pour  $r=0$   $B=0$

D'où  $\frac{dT}{dr} = -\frac{A}{2} r$

T est de la forme  $T(r) = -\frac{A}{4} r^2 + C$

or  $T(R_3) = T_2$  soit  $T_2 = C - \frac{A}{4} R_3^2$

$$T(r) = T_2 + \frac{P_v}{4 \frac{1}{2}} (R_3^2 - r^2)$$

Q4) A l'interface  $\text{UO}_2(\text{sol})/\text{gaine}$  il doit y avoir continuité des flux thermique.

Toute la puissance thermique engendrée

par les réactions de fission est évacuée en régime stationnaire

$$P_1 = h_2 (T_2 - T_3) 2\pi R_3 H N$$

D'où  $T_3 = T_2 - \frac{P_1}{2\pi \left(\frac{d}{2} - e\right) H N h_2}$

Q4) Dans la gaine il n'y a pas de production de chaleur.

On a alors  $\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0$

soit  $r \frac{dT}{dr} = D$

T est de la forme  $T(r) = D \ln r + E$

avec  $T(R_3) = T_3 = D \ln R_3 + E$

et  $T(R_4) = T_4 = D \ln R_4 + E$

D'où  $D = \frac{T_4 - T_3}{\ln R_4 / R_3}$

$E = T_3 - \frac{T_4 - T_3}{\ln R_4 / R_3} \ln R_3$

$$T(r) = T_3 + \frac{T_4 - T_3}{\ln R_4 / R_3} \ln \frac{r}{R_3}$$

Puis  $\Phi_{th} = j_{th}(r) 2\pi r N H = \text{cte}$   
 cylindre hauteur NH =  $P_1$   
 rayon r



22

Soit  $j_h(r) = \frac{P_1}{2\pi r NH}$

Or, d'après la loi de Fourier  $j_h(r) = -\lambda_3 \frac{dT}{dr}$

On a donc  $\frac{dT}{dr} = -\frac{P_1}{2\pi \lambda_3 NH}$

$T(r) = -\frac{P_1}{2\pi \lambda_3 NH} \ln r + F$

avec  $T(R_4) = T_4 = -\frac{P_1}{2\pi \lambda_3 NH} \ln R_4 + F$

$T(r) = T_4 - \frac{P_1 R_4}{\lambda_3 S_{tot}} \ln \frac{r}{R_4}$

06) Applications numériques

$S_{tot} = 4,52 \cdot 10^3 \text{ m}^2$

$T_4 = T_5$  On a  $P_1 = 2\pi R_4 NH \lambda_4 (T_4 - T_5)$

$T_4 = T_5 + \frac{P_1}{S_{tot} \lambda_4}$

$T_4 = 328^\circ\text{C}$

$T_3 = T_4 + \frac{P_1 R_4}{\lambda_3 S_{tot}} \ln \frac{R_4}{R_3}$   $T_3 = 352^\circ\text{C}$

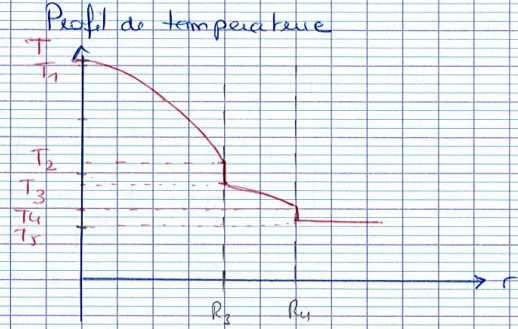
$T_2 = 492^\circ\text{C}$

$T_1 = 838^\circ\text{C}$

$T_1 = T_2 + \frac{P_1 R_3^2}{NH \lambda_3 R_3^2} \ln \frac{R_3}{R_1}$

47

07



49

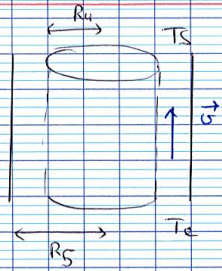
08

31



51

II. Pense en exemple de dépendances angulaires



$$P_v(z) = P_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

OS)  $\Sigma'_0 = \text{Eau entre } z \text{ et } z+dz$

$\Sigma'_1$  à  $t$   $\Sigma'_0 + dm_e$   
 ↑ eau qui entre  
 entre  $t$  et  $t+dt$

$\Sigma'_1$  à  $t+dt = \Sigma'_0 + \text{eau qui sort de } \Sigma'_0 \text{ entre } t \text{ et } t+dt$   
 D'après le 1er principe appliqué à  $\Sigma'_1$  entre  $t$  et  $t+dt$

$$dU + dE_m = \delta Q + \delta W$$

avec  $dU = U_{z_0}(t+dt) + U_{dm_n} - U_{z_0}(t) - U_{dm_e}$

$$= 0 + dm_n e_n - dm_e e_e$$

avec  $dm_n - dm_e = D_m dt$

$$dU = D_m dt c_p (T(z+dz) - T(z))$$

et  $\delta Q = \Phi_{th} dt = P_v(z) \pi R_c^2 dz dt$

$$\delta W = 0$$

D'où  $D_m c_p [T(z+dz) - T(z)] = P_v(z) \pi R_c^2 dz$

59

21

Q10. On a  $D_m c_p \frac{dT}{dz} = P_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \pi R_c^2$

Soit  $\frac{dT}{dz} = \frac{P_0 \pi R_c^2}{D_m c_p} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$

$$T_s - T_e = \frac{P_0 R_c^2 H}{D_m c_p} (-\cos \pi + \cos 0)$$

$$T_s - T_e = \frac{2 P_0 R_c^2 H}{D_m c_p}$$

On a  $T(z) - T_e = \frac{P_0 H R_c^2}{D_m c_p} (-\cos \frac{\pi z}{H} + 1)$

$$T(z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)\right)$$

Q11. Il y a continuité des flux sur une hauteur dz entre le combustible et l'eau

Soit  $P_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \pi R_c^2 dz = h_{cc} (T_p(z) - T(z)) \pi R_c dz$

soit  $\frac{P_0 R_c \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)}{h_{cc}} = T_p(z) - T_e - \frac{T_s - T_e}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)\right)$

$$T_p(z) - T_e = \frac{T_s - T_e}{2} + \frac{T_e - T_s}{2} \cos \frac{\pi z}{H} + \frac{P_0 R_c \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)}{h_{cc}}$$

$$\frac{T_p(z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \frac{\pi z}{H} + \frac{2 P_0 R_c}{h_{cc} (T_s - T_e)} \sin \frac{\pi z}{H} \right]$$

Soit  $B = 1$   $C = \frac{D_m c_p}{h_{cc} H R_c}$



Q12. Pour le combustible, on régime stationnaire  
 $\Sigma$  = cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $dz$  entre

$z$  et  $z+dz$   
 D'après le 1er principe

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$\text{avec } dU = 0 \quad \delta W = 0$$

$$\delta Q = -j_H(r) 2\pi r dz + P_V(z) \pi r^2 dz$$

$$\text{D'où } j_H(r) = P_V(z) \frac{r}{2}$$

36

or, d'après la loi de Fourier  $\vec{j}_H = -\frac{1}{2} \text{grad } T_c$   
 $= -\frac{1}{2} \frac{\partial T_c}{\partial r} \vec{e}_r$

échanges thermiques  
 permanent radiaux  $\uparrow$

$$\frac{\partial T_c}{\partial r} = -\frac{P_V(z)}{2k_2} r$$

$$T_c(r, z) = -\frac{P_0}{2k_2} \min \frac{\pi \beta}{H} \frac{r^2}{2} + \psi(z)$$

$$\text{avec } T_c(R_0, z) = T_p(z)$$

$$\text{Soit } -\frac{P_0}{4k_2} R_0^2 \min \frac{\pi \beta}{H} + \psi(z) = T_p(z)$$