Champ électrostatique

Questions de cours

- Rappeler la loi de Coulomb.
- Retrouver l'ordre de grandeur du champ créé par le noyau sur l'électron dans un atome d'hydrogène.
- Quelle est l'expression du potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle ?
- Quelle est la position relative des lignes de champ par rapport aux surfaces équipotentielles ? Démonstration.
- Les lignes de champ électrostatique sont-elles ouvertes ou fermées ?
- Rappeler l'équation locale de Maxwell-Gauss.
- Que peut-on dire du flux de champ $\overrightarrow{E}$ dans une zone vide de charge ?
- Énoncer le théorème de Gauss.
- Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air.

Applications directes du cours

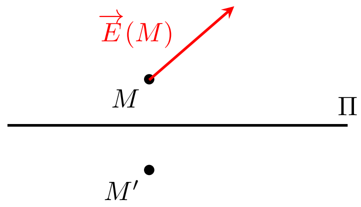
$\boxed{1}$ Dans les différents systèmes de coordonnées (coordonnées catésiennes, cylindriques et sphériques), donnez l'expression du vecteur déplacement élémentaire puis l'expression des surfaces élémentaires et enfin l'expression du volume élémentaire.

$\boxed{2}$ Calculez, en sommant des longueurs,des surfaces ou des volumes élémentaires :
- le périmètre d'un cercle de rayon R,
- la surface d'un rectangle de longueur a et de largeur b,
- la surface d'un disque de rayon R,
- la surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h,
- la surface d'une sphère de rayon R,
- le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h,
- le volume d'une boule de rayon R.

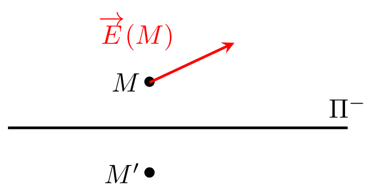
$\boxed{3}$ Soit une sphère de centre O et de rayon R, portant une répartition surfacique de charges σ. Déterminer les transformations laissant cette distribution de charge invariante. Soit un point M de l'espace, déterminer la direction du champ $\overrightarrow{E}$ en M.

$\boxed{4}$ Compléter les schémas en dessinant le champ électrostatique au point M' :

a) Le plan Π est un plan de symétrie d'une distribution de charge $\mathscr{D}$. Le point M' est le symétrique du point M par rapport à Π.



b) Le plan Π^- est un plan d'antisymétrie d'une distribution de charge $\mathscr{D}$. Le point M' est le symétrique du point M par rapport à Π.



$\boxed{5}$ On considère une distribution de charge $\mathscr{D}$ de densité volumique ρ_0 uniforme, d'extension infinie, comprise entre deux plans $z = \pm\dfrac{a}{2}$ dans un repère cartésien. Déterminer les expressions du champ électrostatique et du potentiel électrostatique créés par 3 méthodes :

— Théorème de Gauss
— Équation de Maxwell-Gauss
— Équation de Poisson.
On prendra $V(0)=0$. Étudier le cas particulier où $a \to 0$.

$\boxed{6}$ On considère le cas d'un plan infini uniformément chargé (densité surfacique de charge σ_0). Définir une surface de Gauss intéressante. Calculer le champ puis en déduire le potentiel créés en P par la distribution. Tracer E et V.

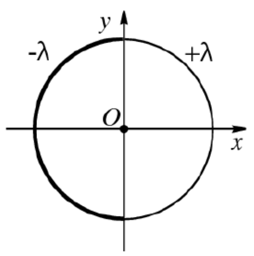
$\boxed{7}$ On considère une boule de centre O, de rayon R uniformément chargée de densité volumique de charges ρ.
1. Déterminer la charge Q de la boule en fonction de ρ et de R.
2. Déterminer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé par cette boule en tout point de l'espace.
3. En déduire le potentiel électrostatique V.
4. Tracer les variations spatiales de E et V
5. Exprimer l'énergie électrostatique de cette boule en fonction de Q et R.

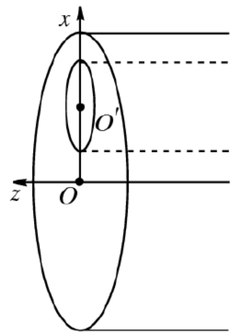
$\boxed{1}$; $\boxed{2}$ $P=2\pi R$, $S_{\text{rect}}=a\cdot b$, $S_{\text{disque}}=\pi R^2$, $S_{\text{cyl}}=2\pi Rh$, $S_{\text{sphere}}=4\pi R^2$, $V_{\text{cyl}}=\pi R^2 h$, $V_{\text{boule}}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$; $\boxed{3}$ $\overrightarrow{E}$ est radial ; $\boxed{4}$; $\boxed{5}$ Pour $|z|>\dfrac{a}{2}$: $\overrightarrow{E}(M)=\pm\dfrac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\overrightarrow{u_r}=\dfrac{z}{|z|}\dfrac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\overrightarrow{u_r}$, $V(M)=??$, pour $|z|<\dfrac{a}{2}$, $\overrightarrow{E}(M)=\dfrac{\rho_0 z}{\epsilon_0}\overrightarrow{u_r}$.

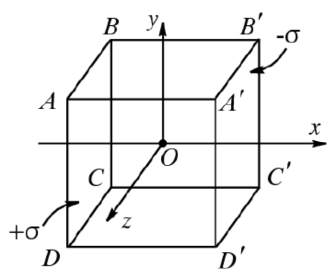
Exercices

1. Invariances et symétries

Pour les distributions de charges suivantes (cf illustration), donner les invariances et les plans de symétrie ou d'antisymétrie.
1. Distribution circulaire de charge.
2. Cylindre infini d'axe (Oz) comportant une partie cylindrique évidée d'axe $(O'z)$ portant une charge volumique ρ_0 uniforme.
3. Cube d'arête a. Les côtés $ABCD$ et $A'B'C'D'$ portent des charges surfaciques uniformes opposées $+\sigma$ et σ.



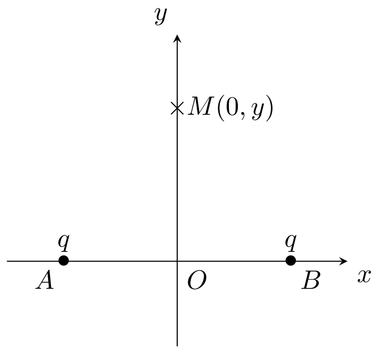


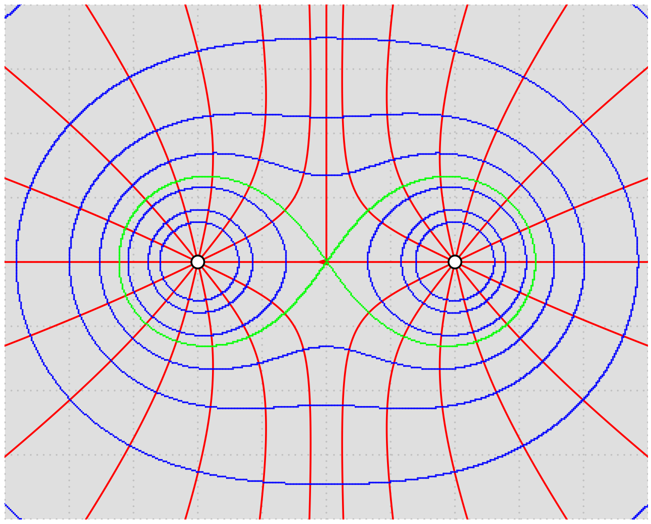


2. Deux charges identiques

On étudie le champ électrostatique créé par deux charges ponctuelles identiques (charge q) placées sur l'axe (Ox) à une distance a de O (cf figure ci-dessous).
1. Déterminer les plans de symétrie de cette distribution de charge.
2. Exprimer le champ $\vec{E}$ en un point M de l'axe (Oy). Tracer $E(y)$.
3. Trouver l'expression de champ $\vec{E}$ en un point M de l'axe (Ox). Tracer $E(x)$.
4. Sur la carte ci-contre, quelles sont les lignes de champ et les équipotentielles ?
5. Orienter les lignes de champ.

6. Soit Q une charge pouvant se déplacer dans le plan xOy, déterminer les positions d'équilibre de Q et leur stabilité.

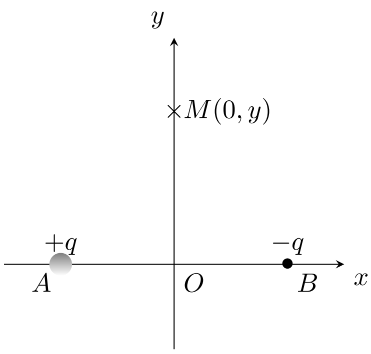


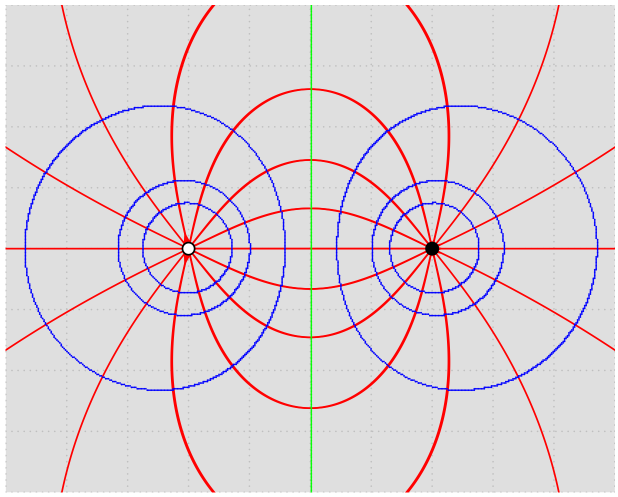


3. Deux charges opposées

On étudie le champ électrostatique créé par deux charges ponctuelles opposées (charges $\pm q$) placées sur l'axe (Ox) à une distance a de O (cf figure ci-dessous).

1. Déterminer les plans de symétrie de cette distribution de charge.
2. Exprimer le champ $\vec{E}$ en un point M de l'axe (Oy). Tracer $E(y)$.
3. Trouver l'expression de champ $\vec{E}$ en un point M de l'axe (Ox). Tracer $E(x)$.
4. Sur la carte ci-dessous, distinguer les lignes de champ des équipotentielles et orienter les lignes de champ.





4. Électromètre

Un électromètre est constitué de deux boules métalliques identiques de masse m et de rayon r suffisamment petit pour qu'elles puissent être considérées comme ponctuelles. Elles sont suspendues à un même point O par deux fils isolants de même longueur b. Une boule notée A est fixe, le point A est sur la verticale passant par O. L'autre notée P est mobile.

L'ensemble est placé dans le champ de pesanteur supposé uniforme. On donne :

$$b = 12,0 \text{ cm},\ \text{m} = 2,55 \text{ g},\ \text{g} = 9,81 \text{ m.s}^{-2}, \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$$

Dans un premier temps, la boule P n'est pas chargée et la boule A porte la charge électrique Q. On met les deux boules en contact. La charge Q se répartit de manière égale entre les deux boules. Il en résulte une déviation du fil OP d'un angle φ par rapport à la verticale.

1. Donner l'expression de l'intensité F de la force électrostatique qui s'exerce sur P. Quelle est sa direction ?
2. Déterminer l'expression de l'angle φ_e à l'équilibre.
3. Montrer que la mesure de l'angle φ_e à l'équilibre permet de mesurer la valeur de la charge Q.
4. On mesure $\varphi_e = 60^o$. En déduire la valeur numérique de la charge Q.
5. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle E_p de P.
6. Retrouver l'expression de φ_e et étudier la stabilité de l'équilibre.

5. Anneau chargé

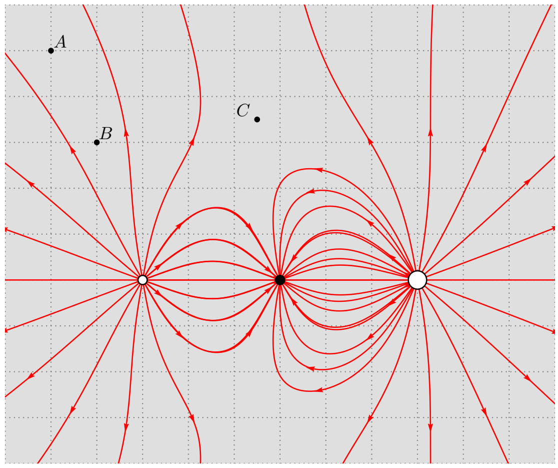
On considère une spire circulaire de centre O et de rayon R. Cette spire porte une charge Q répartie uniformément sur sa longueur. Soit M un point de l'axe de symétrie de révolution (Oz) perpendiculaire en O au plan de la spire.

1. Quelle est la direction du champ $\overrightarrow{E}$ au point M ? Justifiez.
2. Déterminer le potentiel $V(M)$ puis en déduire le champ $\overrightarrow{E}(M)$.
3. Exprimer la force ressentie par une charge q placée en M.

6. Topographie

Le schéma ci-contre représente les lignes du champ électrostatique créé par des charges ponctuelles placées dans un plan.

1. Quel est le signe de chaque charge ?
2. Quel est le signe de la charge totale ?
3. La norme du champ en A est de 100 V.m^{-1}. Calculer une valeur approchée du champ en B.
4. Que peut-on dire du champ au voisinage de point C ?



7. Boule non uniformément chargée

Déterminer le champ créé par une boule de rayon R de densité volumique de charge $\rho(r) = \rho_0(1 - r^2/R^2)$.

8. Cylindre et équipotentielle

Soit un cylindre de hauteur infinie, de rayon R et d'axe Oz. Un point de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques $(r; \theta; z)$. La surface latérale du cylindre est une équipotentielle $V = V_0$. Déterminer les expression $\vec{E}$ et V en tout point de l'espace puis donner la forme des lignes de champ et des surfaces équipotentielles pour les deux situations suivantes :

1. le cylindre est chargé uniformément en surface avec une densité surfacique de charge σ_0.
2. le cylindre est chargé en volume avec une densité volumique de charge $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$ pour $r < R$ et 0 sinon.

9. Condensateur cylindrique

Ce modèle permet de calculer la capacité linéique d'un câble coaxial.
Un condensateur cylindrique est constitué de deux surfaces cylindriques, de même axe z. La hauteur de chaque cylindre est notée h. h étant très grand par rapport aux rayons des cylindres, on pourra, pour les calculs de champ électrique, considérer les cylindres comme infinis. Le premier cylindre, de rayon R_1 porte une charge totale Q. Le deuxième, de

rayon $R_2 > R_1$, porte une charge totale $-Q$. Ces charges sont uniformément réparties en surface sur les armatures. Les potentiels électriques des armatures sont respectivement V_1 et V_2. Soit un point M situé à la distance r de l'axe.

1. Calculer le champ électrique entre les armatures.
2. Calculer le potentiel électrique entre les armatures. Exprimer la différence de potentiel $V_1 - V_2$ en fonction de Q, ϵ_0, h, R_1 et R_2.
3. Exprimer la capacité C du condensateur en fonction de Q et des potentiels électriques des armatures V_1 et V_2, puis en fonction de ϵ_0, h, R_1 et R_2. Faire application numérique pour $R_1 = 1,5$ mm, $R_2 = 5,0$ mm et h=1 m.
4. Que devient l'expression de la capacité C si les rayons des armatures sont très voisins c'est-à-dire si $R_2 - R_1 = e \ll R_1$? Montrer que le condensateur cylindrique est alors équivalent à un condensateur plan dont on donnera les caractéristiques (épaisseur et surface).

10. Champ dans une cavité cylindrique

Considérons un cylindre infini d'axe Oz de densité volumique de charge ρ uniforme. On creuse dans ce cylindre une cavité cylindrique infinie vide, d'axe $O'z$ parallèle à Oz mais non confondus.

1. Version non guidée : Montrer que le champ électrostatique est uniforme dans la cavité.
2. Version guidée :
   (a) À partir du théorème de superposition, décrire le système à l'aide de deux cylindres homogène de densités de charge opposées.
   (b) À l'aide du théorème de Gauss, exprimer le champ créé à l'intérieur d'un cylindre infini seul. Remarquer que $r\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe.
   (c) En déduire finalement que le champ dans la cavité vaut $\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{\rho}{2\epsilon_0}\overrightarrow{OO'}$

11. Calcul de densité volumique de charges

On donne en coordonnées sphériques :

$$div(a(r)\overrightarrow{u_r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\, r^2\, a(r)}{\partial\, r}$$

Un champ électrique à symétrique sphérique $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{u_r}$ a pour expression (r étant la distance au point O) :

$$E(r) = E_0 \text{ constante si } r < a \text{ et } E(r) = 0 \text{ si } r > a$$

Ce champ est créé en partie par une distribution volumique de charges de densité ρ_0.

1. Déterminer ρ_0 en tout point de l'espace.
2. Montrer qu'il existe nécessairement une densité surfacique de charge σ sur une surface à préciser et donner son expression.

12. Potentiel de Yukawa

On considère une distribution de charges électriques créant en un point M tel que $\|\overrightarrow{OM}\| = r$ un potentiel : $V(r) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r}e^{-r/a}$ (potentiel de Yukawa).

1. Déterminer le champ $\overrightarrow{E}(r)$. Comment varie ce champ au voisinage immédiat du point O ? A.N. Calculer E pour $r = a = 1$ Å ; $q = 1,6.10^{-19}$ C.
2. Calculer le flux Φ du champ électrique à travers une sphère de rayon r et de centre O. Que devient Φ lorsque $r \to 0$ et $r \to \infty$?
3. Montrer que le potentiel de Yukawa est créé par une charge ponctuelle q_0 et une charge diffuse de densité $\rho(r)$ que l'on déterminera.
4. Calculer le potentiel créé en O par la charge diffuse. En déduire l'énergie nécessaire pour séparer la charge ponctuelle de la charge diffuse qui l'entoure.
5. Le système précédent représente un modèle d'atome. Quelle est l'énergie d'ionisation de cet atome ?

13. Modélisation d'un nuage mince et d'un orage

On considère un nuage, qu'on modélise comme un plan infini $z = h$. Il est chargé avec une densité surfacique de charge σ négative.

1. Déterminer le champ électrique engendré par le nuage dans tout l'espace.
2. Le sol est le plan $z = 0$. Il est chargé avec une densité surfacique de charge $-\sigma$. Calculer alors le champ électrique entre $z = 0$ et $z = h$.
3. En déduire le potentiel électrique entre $z = 0$ et $z = h$. On prendra la constante telle que $V(0) = 0$.
4. Le nuage est un carré de 10 km de côté. Il est à une altitude $h = 2$ km. Un éclair se produit lorsque le champ électrique dépasse le champ disruptif de l'air, c'est-à-dire le champ pour lequel l'air devient conducteur. Le champ disruptif de l'air humide est typiquement $E_{\text{dis}} = 10$ kV.cm^{-1}.
   Calculer alors le potentiel $V(h)$ du nuage lors d'un orage.

14. Astre à géométrie sphérique

Un astre de rayon extérieur R est constitué d'un noyau homogène de masse volumique ρ_n de rayon $R_n < R$ entouré d'un manteau homogène de masse volumique ρ_m dans la partie $R_n < r < R$. On note m la masse totale de l'astre, et m_n la masse du noyau.

1. Exprimer m_n et m en fonction de R_n, R, ρ_n et ρ_m.
2. À partir des symétries et invariances de la distribution de masses, déterminer que le champ gravitationnel est de la forme $\overrightarrow{G}(M) = G(r)\overrightarrow{e_r}$.
3. En déduire le champ dans tout l'espace à l'aide du théorème de Gauss pour la gravitation.
4. Tracer l'allure de $G(r)$.