

# Dipôle électrostatique

## Questions de cours

- Définition d'un dipôle électrostatique et de son moment dipolaire.
- Qu'est-ce que l'approximation dipolaire ?
- Déterminer le potentiel créé par un dipôle.
- Quel est l'effet d'un champ électrique extérieur sur un dipôle électrostatique ?
- Modèle de Thomson de l'atome.
- Définir la polarisabilité d'un atome. En donner une estimation.

## Rappels

$A$  correspond au centre d'un dipôle caractérisé par son moment dipolaire  $\vec{p}$ . Ce dernier, plongé dans un champ électrique  $\vec{E}$  subit une action :

- de résultante :  $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}(A)$
- de moment en  $A$  :  $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{p} \wedge \vec{E}(A)$

Son énergie potentielle vaut  $\mathcal{E}_P = -\vec{p} \cdot \vec{E}(A)$ .

## Applications directes du cours

- 1 On rappelle le potentiel créé par un dipôle d'origine  $O$  et de moment dipolaire  $\vec{p}$  :  $V(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  en coordonnées sphériques. Calculer le champ associé, puis son flux à travers une sphère de rayon  $r$  et de centre  $O$ . Retrouver le résultat sans calcul.

## Exercices

### 1. Étude de différents modèles de l'atome

- Le modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène.  
Dans ce modèle on considère une boule uniformément chargée de rayon  $a$ , de charge totale  $+e$ .
  - Déterminer l'expression du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la boule.
  - On considère un électron dans le champ de cette boule. Y a-t-il une position d'équilibre ? Étudier sa stabilité.
  - On ajoute un champ uniforme constant  $\vec{E}_0$ . L'électron a-t-il une position d'équilibre stable ?
  - Calculer la valeur minimale de  $E_0$  pour arracher l'électron à l'atome et calculer le travail fourni pour ioniser l'atome.
- On considère maintenant le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène.  
Le noyau est en  $O$  et l'électron tourne autour du noyau avec une trajectoire circulaire de rayon  $a_0$ .
  - Soit  $\vec{L}_0$  le moment cinétique de l'électron par rapport à  $O$ , on pose  $\vec{L}_0 \cdot \vec{u}_z = \hbar$ .  
Exprimer le rayon de la trajectoire en fonction des données et en déduire l'énergie nécessaire pour arracher l'électron à l'atome.
  - On ajoute dans un plan un champ uniforme constant  $\vec{E}_0$  et on considère que l'électron a toujours une trajectoire circulaire mais de centre  $O' \neq O$  avec  $\vec{OO}' // \vec{E}_0$ . La trajectoire est dans un plan perpendiculaire

à  $\vec{E}_0$ . On appelle  $\vec{u}_z$  le vecteur unitaire de la direction  $\vec{OO'}$  et on a  $\vec{L}_{O'} \cdot \vec{u}_z = \hbar$ . Si  $a$  est le rayon de la trajectoire, montrer que  $a_0 = \frac{a}{(1 + k(a)E_0^2)^{3/2}}$ .

## 2. Dipôle dans un condensateur

Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques très fines, de surface  $S$ , situées en  $x = 0$  et en  $x = e$ . L'isolant entre les deux armatures a une permittivité  $\epsilon_0$ . On néglige les effets de bord. Les densités surfaciques de charges portées par les deux armatures sont uniformes et opposées.

Pour un dipôle rigide  $\vec{p}$  placé dans un champ électrique extérieur  $\vec{E}$ , l'énergie potentielle est  $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$  et le couple subi par ce dipôle est  $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ .

- Déterminer le champ électrostatique à l'intérieur du condensateur en utilisant le champ créé par un plan infini.
- On place à l'intérieur du condensateur un dipôle électrostatique de moment d'inertie  $J$  en un point  $A$  d'abscisse  $x = e/2$ . Il peut tourner autour de l'axe  $Az$  mais pas se déplacer. Déterminer par deux méthodes les positions d'équilibre.
- Étudier par deux méthodes la stabilité de l'équilibre.
- Établir par deux méthodes l'équation différentielle en  $\theta$  liée à la rotation du dipôle autour de l'axe  $Az$ . Déterminer la période des petits mouvements autour de la position d'équilibre stable.

## 3. Forces entre une charge et un dipôle

Une charge ponctuelle  $q$  est en  $O$ . Un dipôle  $\vec{p}$  est en  $M$  à une distance  $r$  de  $O$ . La force subie par un dipôle  $\vec{p}$  dans un champ extérieur  $\vec{E}$  est  $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}$ .

- Si le dipôle est libre de tourner sur lui-même, comment s'orienté-t-il par rapport à la charge ?
- On suppose désormais que le dipôle s'est orienté dans la position stable de la question précédente. Pour simplifier, on orientera l'axe  $Ox$  selon cette direction. Démontrer que la force subie par le dipôle dans le champ de la charge vaut  $\vec{F}_{c \rightarrow d} = -\frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 x^3} \vec{e}_x$ . Commenter sa direction.
- Le dipôle  $\vec{p}$  placé en  $M$  crée en  $O$  le champ électrique :

$$\vec{E}_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{MO})\vec{MO} - OM^2 \vec{p}}{OM^5}$$

En déduire l'expression de la force  $\vec{F}_{d \rightarrow c}$  du dipôle sur la charge. Commenter sa direction.

- Comparer ces deux forces et conclure.

## 4. Molécule de $\text{CO}_2$

On considère la molécule de dioxyde de carbone.

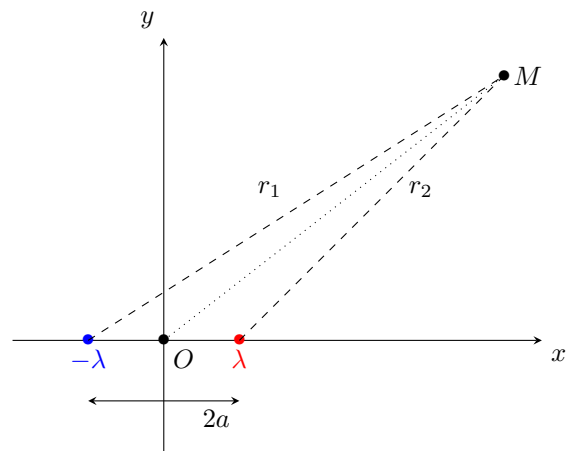
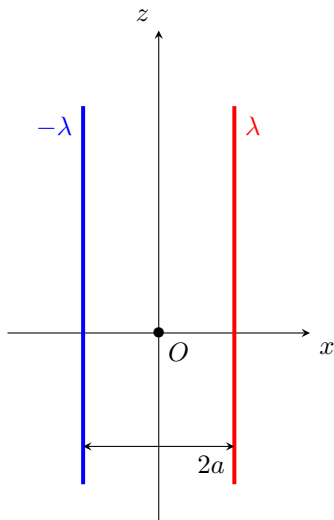
- En étudiant la structure de la molécule, proposer une distribution de charge équivalente.
- Déterminer le potentiel créé par cette molécule en un point éloigné.
- En déduire le champ électrostatique créé par cette molécule en un point éloigné.

## 5. Champ et potentiel créés par deux fils infinis

- On considère un fil infini d'axe  $Oz$  portant une densité linéique de charge constante  $\lambda$ .
  - Déterminer le champ électrostatique  $\vec{E}$ .
  - En déduire le potentiel électrostatique  $V$ .
- On considère deux fils infinis parallèles à l'axe  $Oz$  situés en  $(x = -a, y = 0)$  et  $(x = a, y = 0)$  portant respectivement des densités linéiques de charges  $-\lambda$  et  $+\lambda$ .
  - Donner l'expression du potentiel en un point de l'espace défini par les distances  $r_1$  et  $r_2$  aux deux fils, en choisissant  $V = 0$ , à égale distance des deux fils.

(b) En déduire que pour  $r \gg a$  :

$$V(M) = \frac{\lambda a}{\pi \epsilon_0 r} \cos \theta$$



## 6. Interaction entre un dipôle et un cercle chargé

Un cercle de rayon  $R$  porte une charge  $Q$  répartie uniformément à sa périphérie. En son centre  $O$ , on place un dipôle électrostatique de moment dipolaire  $\vec{p}$ . Déterminer les actions mécaniques subies par le dipôle si  $\vec{p}$  est parallèle à l'axe du cercle.

## Réponses

2 1. Pour  $x \in [0, e]$ ,  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$ ; 2.  $\vec{\Gamma} = \vec{0}$  ou  $E_p$  extrémale; 3. 0 stable,  $\pi$  instable; 4.  $\ddot{\theta} + \frac{pE}{J} \sin \theta = 0$ .

3 1. radiale; 2.

4