Champ magnétostatique

Le domaine de l'électrostatique est celui de l'interaction entre les charges immobiles et de ses effets. Nous allons compléter notre étude de l'électromagnétisme en nous intéressant à l'interaction qui apparaît entre les courants électriques, c'est-à-dire les charges en mouvement ; c'est le domaine du magnétisme. Notre étude sera limitée à la magnétostatique qui concerne les phénomènes magnétiques indépendants du temps.

Magnétostatique : étude des phénomènes liés à l'existence de champs magnétiques indépendants du temps produits par des aimants immobiles ou des courants constants.

I Propriétés du champ magnétostatique

I.1 Le principe de superposition

Les équations de la magnétostatique sont linéaires : on peut appliquer le principe de superposition.

Le champ magnétostatique créé par une distribution de courants est la somme des champs créés par ces courants.

I.2 Principe de Curie

Les éléments de symétrie et d'invariance des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

Causes : ....

Effets : ....

a Invariances

• par translation :

Une distribution de courants est invariante par le translation $\overrightarrow{a}$ si et seulement si :

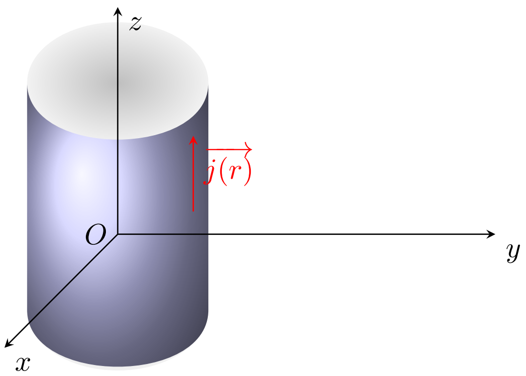
$$\forall M \in \mathscr{D},\ M' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{a}}(M) \in \mathscr{D} \ \text{ et } \ \overrightarrow{j}(M') = \overrightarrow{j}(M).$$

Si la distribution de courants $\mathscr{D}$ est **invariante** par **toute translation** selon l'axe Ox, alors $\overrightarrow{j}(M)$ **ne dépend pas de** x et le champ magnétostatique $\overrightarrow{B}(M)$ non plus.

• par rotation :

Si la distribution de courants $\mathscr{D}$ est **invariante** par **toute rotation** d'angle θ autour de l'axe Oz, alors $\overrightarrow{j}(M)$ **ne dépend pas de** θ et le champ magnétostatique $\overrightarrow{B}(M)$ non plus.

Cas particulier de la symétrie cylindrique :



b Plans de symétrie et d'antisymétrie de $\mathscr{D}$ distribution de courants

• Π est un plan de symétrie pour la distribution de courants $\mathscr{D}$ si et seulement si :
- $\forall M \in \mathscr{D}$, $M' = sym_{\Pi}(M) \in \mathscr{D}$,
- et $\overrightarrow{j}(M') = sym_{\Pi}(\overrightarrow{j(M)})$.

• Π^- est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courants $\mathscr{D}$ si et seulement si :
- $\forall M \in \mathscr{D}$, $M' = sym_{\Pi^-}(M) \in \mathscr{D}$,
- et $\overrightarrow{j}(M') = -sym_{\Pi^-}(\overrightarrow{j(M)})$.

c Direction du champ magnétostatique

• Transformation du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ par symétrie plane :

Rappel : $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$.

....

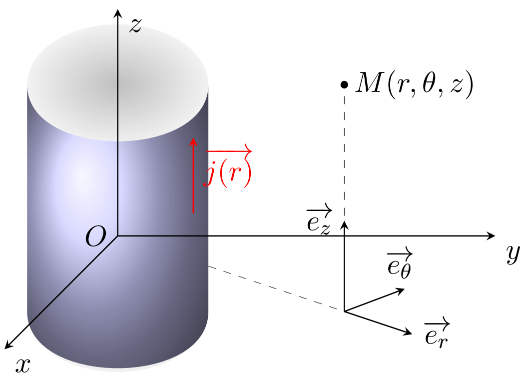
$\overrightarrow{B}$ est un pseudo-vecteur.

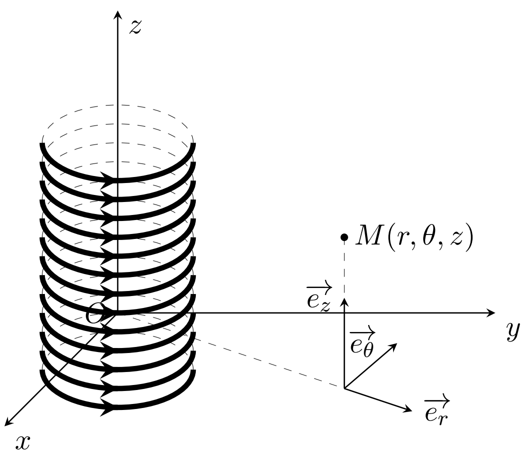
• Plan de symétrie pour la distribution de courant $\mathscr{D}$:

Si Π est un plan de symétrie pour la distribution de courant alors c'est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique.

> En un point M appartenant à un plan de **symétrie** d'une distribution de courants, le champ magnétostatique créé en ce point $\overrightarrow{B}(M)$ est **perpendiculaire** à ce plan.

Exemples :





• Plan d'antisymétrie pour la distribution de courant $\mathscr{D}$:

Si Π^- est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant alors c'est un plan de symétrie pour le champ magnétique.

En un point M appartenant à un plan d'**antisymétrie** d'une distribution de courants, le champ magnétostatique créé en ce point $\overrightarrow{B}(M)$ **appartient** à ce plan.

Exemple : ....

....

....

....

....

....

....

....

II Flux du champ magnétique

II.1 Équation de Maxwell-flux ou Maxwell-Thomson

$$\boxed{\operatorname{div} \overrightarrow{B}(M) = 0}$$

Propriété intrinsèque au champ magnétique.

II.2 Flux conservatif

Soit $\mathscr{S}$ une surface fermée à travers laquelle on souhaite calculer le flux de champ magnétique :

....

....

....

....

....

Le champ magnétique est à **flux conservatif :**

- Le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers une surface fermée est nul.
- Le flux de $\overrightarrow{B}$ est le même à travers toute section d'un tube de champ.

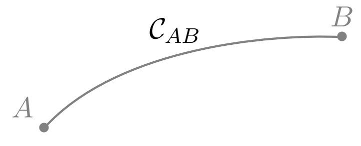
III Circulation du champ magnétique

III.1 Rotationnel d'un champ de vecteurs

a Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe

Circulation sur un segment Soit $\mathcal{C}_{AB}$ un segment de courbe limité par les points A et B ; la circulation du champ de vecteurs $\vec{a}$ sur $\mathcal{C}_{AB}$ est :

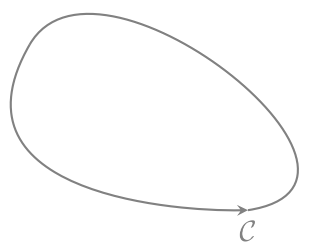
$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \overrightarrow{a}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}$$



Circulation sur une courbe fermée Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée orientée ; la circulation du champ de vecteurs $\vec{a}$ sur $\mathcal{C}$ est :

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{a}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}.$$

Le symbole $\oint$ signifie que le point M effectue un tour sur la courbe fermée.

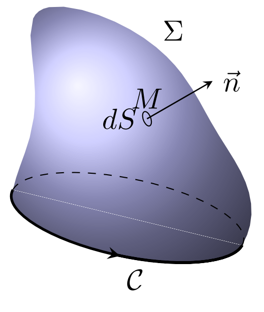


b Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface ouverte

Soit Σ une surface ouverte de bord $\mathcal{C}$; la courbe $\mathcal{C}$ étant orientée, le flux du champ $\vec{a}$ à travers la surface est l'intégrale :

$$\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \overrightarrow{a}(M) \cdot \overrightarrow{n}\ dS$$

où $\overrightarrow{n}$ est orientée par la "règle du tire-bouchon".



c Définition

L'opérateur rotationnel transforme un champ de vecteurs $\overrightarrow{a}$ en champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{a}$:

$$\delta\mathcal{C}_M = \oint_{M\in\Gamma} \overrightarrow{a}(M) \cdot d\overrightarrow{\ell}_M = (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{a}(M)) \cdot \overrightarrow{dS}_M$$

Le rotationnel possède donc une signification intrinsèque : c'est une densité surfacique de circulation. En choisissant une surface Σ infinitésimale autour d'un point M, on peut exprimer le rotationnel dans un système de coordonnées quelconque.

d Expressions du rotationnel

On montre, en calculant la circulation le long de petits rectangles de côtés (dx, dy) (dy, dz) et (dz, dx) ayant pour coin le point $M(x, y, z)$, que l'expression en coordonnées cartésiennes du rotationnel est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{a} = \left(\frac{\partial\, a_z}{\partial\, y} - \frac{\partial\, a_y}{\partial\, z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial\, a_x}{\partial\, z} - \frac{\partial\, a_z}{\partial\, x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial\, a_y}{\partial\, x} - \frac{\partial\, a_x}{\partial\, y}\right)\overrightarrow{e_z}$$

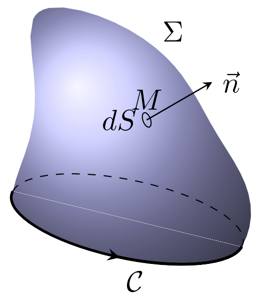
En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\, a_z}{\partial\, \theta} - \frac{\partial\, a_\theta}{\partial\, z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial\, a_r}{\partial\, z} - \frac{\partial\, a_z}{\partial\, r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\,(r a_\theta)}{\partial\, r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\, a_r}{\partial\, \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{a} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\,(\sin\theta a_\phi)}{\partial\, \theta} - \frac{\partial\, a_\theta}{\partial\, \phi}\right)\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\, a_r}{\partial\, \phi} - \frac{\partial\,(r a_\phi)}{\partial\, r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\,(r a_\theta)}{\partial\, r} - \frac{\partial\, a_r}{\partial\, \theta}\right)\overrightarrow{e_\phi}$$

e Théorème de Stokes



La circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe fermée orientée $\mathcal{C}$ limitant une surface ouverte Σ est égale au flux à travers Σ du rotationnel de $\vec{a}$:

$$\iint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{a}(M)\cdot\vec{n}\,dS_M = \oint_{M\in\mathcal{C}} \overrightarrow{a}(M)\cdot\overrightarrow{d\ell}_M$$

III.2 Équation de Maxwell-Ampère

En régime stationnaire :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B}(M) = \mu_0\,\overrightarrow{j}(M)}$$

$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1} perméabilité du vide.

III.3 Théorème d'Ampère

Soit $\mathscr{C}_B$ la circuation du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ sur un contour orienté fermé Γ :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Théorème d'Ampère – La circulation du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé par une distribution de courants $\mathscr{D}$ le long d'un contour fermé et orienté Γ_A est égale au produit de μ_0 par la somme des courants enlacés par Γ_A.

$$\mathcal{C}_{\Gamma_A} = \oint_{P\in\Gamma_A} \overrightarrow{B}(P).\overrightarrow{d\ell_P} = \mu_0 I_{\text{enlacés}}.$$

IV Topographie du champ magnétostatique

IV.1 Définitions

* **Lignes de champ** = courbes tangentes en chacun de leur point au vecteur champ $\vec{B}$; elles sont orientées par $\overrightarrow{B}$.

  L'équation des lignes de champ est donnée par : $\overrightarrow{B}(M) = \alpha(M)d\overrightarrow{\ell}$.

  En coordonnées cartésiennes :
  $$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}.$$

* **Tube de champ** = ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

IV.2 Propriétés des lignes de champ

• Deux lignes de champ magnétique ne se coupent pas, sauf en un point de champ nul.

• Les lignes de champ magnétique sont fermées sur elle-même.

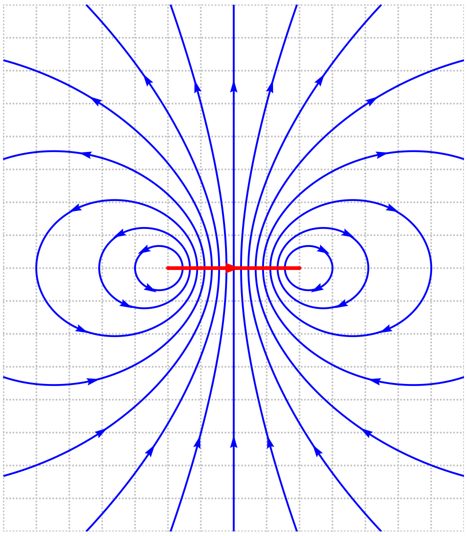
• Les lignes de champ magnétique tournent autour des sources (lignes de courant) et sont orientées par la règle de la main droite.

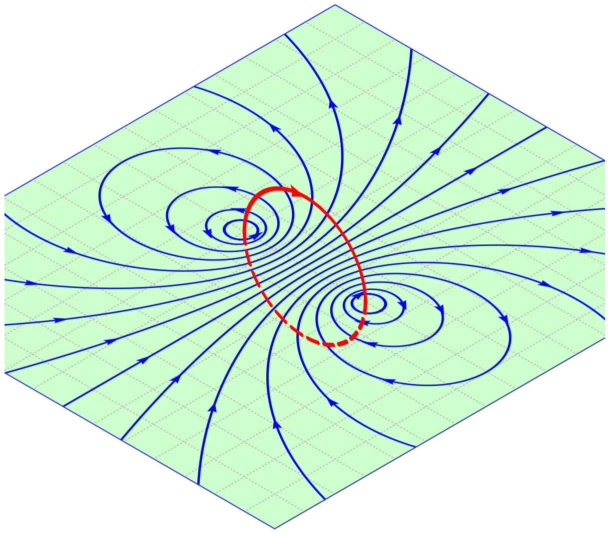
• Les lignes de champ magnétique vont du pôle Nord vers le pôle Sud pour un aimant.

• Le long d'un tube de champ magnétique, la norme de $\overrightarrow{B}$ est d'autant plus grande que le tube de champ est étroit.

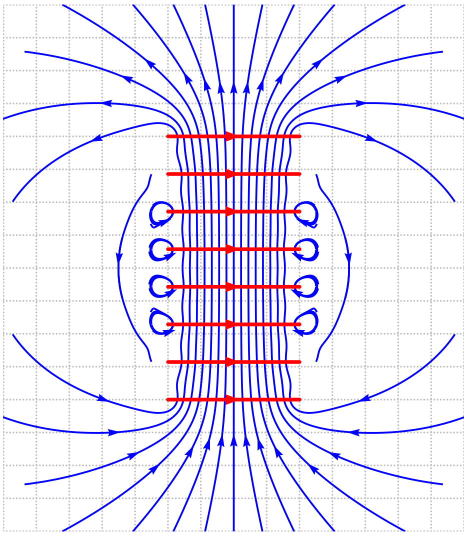
IV.3 Exemples

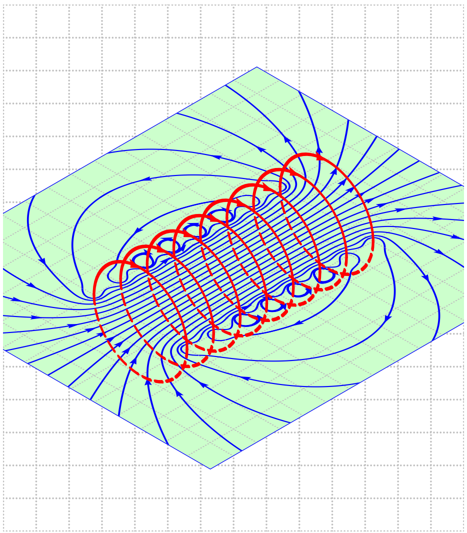
Cas d'une spire :





Cas d'une bobine :





V Exemples

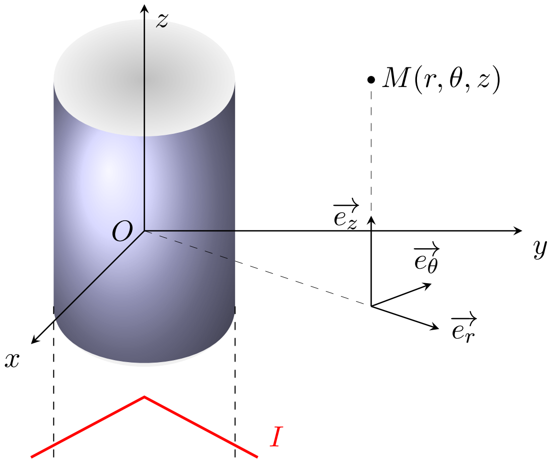
V.1 Méthode

- Schéma de la distribution de courants,
- Choix du repère et expression générale du champ $\overrightarrow{B}(M)$,
- Étude des invariances de la distribution de courants : élimination de variables spatiales.
- Étude des plans de symétrie de la distribution de courants : direction du champ $\overrightarrow{B}(M)$ au point M.
- Détermination de $\overrightarrow{B}(M)$ soit à partir de l'équation locale $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$, soit à partir du théorème d'Ampère :
  - Choisir un contour d'Ampère,
  - Orienter ce contour arbitrairement,
  - Exprimer la circulation de $\overrightarrow{B}$: ....
  - Calculer I_{enlace} en distinguant éventuellement différents cas,
  - Conclure en appliquant le théorème.

V.2 Câble rectiligne infini

Calculer le champ magnétostatique créé en tout point de l'espace par un câble rectiligne infini, cylindrique d'axe Oz et de rayon R, parcouru par un courant d'intensité I réparti uniformément.

Schéma :



Repère : ....

....

....

....

....

Invariances : ....

....

....

....

Symétries : ....

....

....

Contour d'Ampère : ....

....

....

Circulation de champ : ....

....

....

. . . .

Intensité enlacée : . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

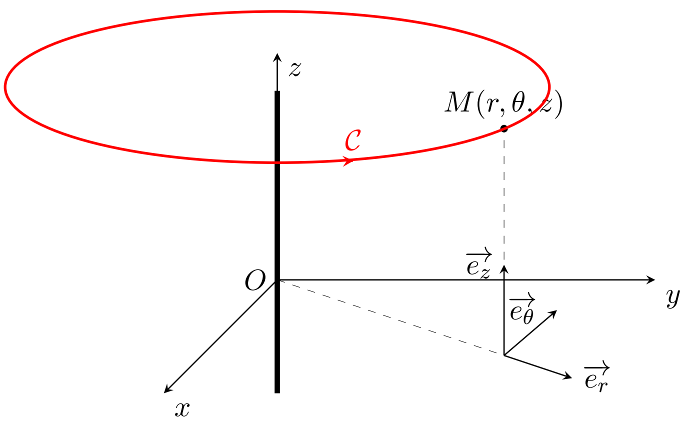
Théorème d'Ampère : . . . .

. . . .

. . . .

Représentation de $B(r)$:

Fil cylindrique infini



Soit $(O, \overrightarrow{e_z})$ la droite modélisant le fil.
Pour exploiter l'invariance par translation et l'invariance par rotation, on utilise les coordonnées cylindriques.
Soit $M(r, \theta, z)$ un point quelconque de l'espace ; le plan $(M; \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant, donc un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique. Le champ est donc colinéaire à $\overrightarrow{e_\theta}$; compte tenu des invariances par translation et par rotation, on obtient

$$\overrightarrow{B}(M) = B(r)\overrightarrow{e_\theta}$$

On applique le théorème d'Ampère à un cercle $\mathcal{C}$ d'axe Oz et de rayon r, orienté positivement selon $\overrightarrow{e_\theta}$; l'intensité enlacée est l'intensité circulant dans le fil

$$I_\mathcal{C} = I$$

tandis que la circulation de $\overrightarrow{B}$ le long de $\mathcal{C}$ est

$$\oint_\mathcal{C} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \oint_\mathcal{C} B(r)\overrightarrow{e_\theta} \cdot rd\theta\overrightarrow{e_\theta} = 2\pi r B(r)$$

On en déduit l'expression du champ magnétique créé par un fil rectiligne infini

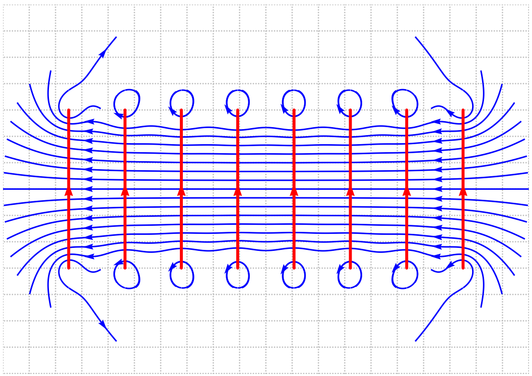
$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$$

Par construction, ce champ est à divergence nulle.

Le vérifier !

V.3 Solénoïde

Un circuit électrique obtenu en bobinant régulièrement un fil conducteur sur un cylindre de rayon a et de longueur ℓ est appelé solénoïde de section circulaire.



a Champ créé par un solénoïde infini

Calculer le champ magnétostatique à l'intérieur d'un solénoïde infini, de rayon R, comportant n spires par unité de longueur, ces spires étant parcourues par un courant I.
On admet la nullité du champ à l'extérieur du solénoïde.

Schéma : ....

....

....

....

Repère : ....

. . . .

Invariances : . . . .

. . . .

Symétries : . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Contour d'Ampère : . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Circulation du champ : . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Intensité enlacée : . . . .

. . . .

Théorème d'Ampère : . . . .

. . . .

. . . .

....

....

....

....

....

b Inductance propre

Rappels : Le champ créé par un circuit, appelé champ propre $\overrightarrow{B_p}$, est proportionnel au courant I qui le parcourt.
Le flux de ce champ propre à travers le circuit lui-même, appelé flux propre Φ_p, est également proportionnel au courant I, avec un facteur de proportionnalité positif, appelé **inductance propre** du circuit, noté L :

$$\Phi_p = LI \quad \text{avec} \quad \Phi_p = \iint_{circuit} \overrightarrow{B_p} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Un solénoïde peut être vu comme une succession de spires. Pour calculer son inductance propre, on calcule le flux du champ magnétique créé (champ propre) à travers une spire et on multiplie par le nombre de spires.

À travers 1 spire : $\Phi_1 =$ ....

....

Pour une longueur ℓ comportant N spires :

$\Phi_{P-\ell} =$ ....

....

....

....

c Densité volumique d'énergie magnétique

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .