Dipôle magnétique

Dans ce chapitre, on reprend la notion de moment magnétique vu en PCSI pour l'appliquer à l'échelle microscopique.

I Moment magnétique

I.1 Rappel

Un **dipôle magnétique** peut être modélisé par une petite spire plane et filiforme parcourue par un courant d'intensité I.

Le **moment dipolaire magnétique** d'un dipôle est le vecteur $\overrightarrow{\mathscr{M}} = I\overrightarrow{S}$, où $\overrightarrow{S}$ est le vecteur surface, orienté dans le sens positif par rapport au courant I .

La notion de moment magnétique est étendue aux aimants puisque les lignes de champ magnétique d'un aimant droit et d'une spire de courant sont similaires à grande distance.

Le moment dipolaire magnétique se mesure en ....

I.2 Moment magnétique atomique

Dans le modèle planétaire de l'atome proposé par Bohr (avant l'apparition de la notion de fonction d'onde), l'électron suit une trajectoire circulaire. Il possède donc un moment cinétique $\overrightarrow{L}$. Mais on peut voir cette charge en mouvement comme une boucle élémentaire de courant possédant un moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$.

a Moment cinétique de l'atome d'hydrogène

Moment cinétique de l'électron : ....

....

....

....

....

b Moment magnétique de l'atome d'hydrogène

Moment magnétique : ....

....

....

....

....

....

....

Remarque : ....

....

Dans le modèle planétaire de l'atome, le moment cinétique de l'électron $\overrightarrow{L}$ et le moment magnétique $\overrightarrow{\mathscr{M}}$ engendré sont proportionnels. On appelle rapport **gyromagnétique** γ le facteur de proportionnalité :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}} = \gamma \overrightarrow{L} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{q}{2m}$$

I.3 Magnéton de Bohr

Objectif : introduire un moment magnétique associé à l'échelle atomique : le magnéton de Bohr, noté μ_B.

Déjà vu : le moment cinétique de l'électron dans un atome est quantifié :

$$\|\overrightarrow{L}\| = n\hbar$$

où $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite.

a Analyse dimensionnelle

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

b Ordre de grandeur

On a $\overrightarrow{\mathscr{M}} = \gamma \overrightarrow{L}$ avec $\|\overrightarrow{L}\|$ quantifiée. On en déduit que le moment magnétique de l'électron est lui aussi quantifié, et qu'il vaut un nombre entier de fois $\gamma\hbar$.

L'unité de moment magnétique atomique est le **magnéton de Bohr** μ_B avec

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$$

AN : ....

c Propriétés magnétique de la matière

Le moment magnétique d'un atome est la somme des moments magnétiques de ses constituants. Il est principalement dû aux moments magnétique des électrons. Par conséquent, le moment magnétique d'un atome est quantifié et vaut un nombre entier de fois le **magnéton de Bohr** μ_B

Le magnéton de Bohr donne un ordre de grandeur du moment magnétique d'un atome. Si le matériau est magnétique, les moments des atomes s'alignent et les effets se cumulent. Dans un matériau non magnétique, le désordre conduit à une moyenne nulle.

Ordre de grandeur du moment magnétique volumique d'un aimant :

....

....

....

....

....

....

II Actions subies par un dipôle

II.1 Cas d'un champ magnétique extérieur uniforme

a Somme des efforts

La somme des efforts est nulle ; en effet :

$$\overrightarrow{F} = \oint I\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B_0} = I\left(\oint \overrightarrow{d\ell}\right) \wedge \overrightarrow{B_0} = \overrightarrow{0}.$$

b Moment des efforts

Les efforts sont donc représentés par un couple de moment

$$\overrightarrow{\Gamma} = \oint \overrightarrow{r} \wedge (I\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B_0}) = I\oint (\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{B_0})\overrightarrow{d\ell} - I\oint (\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{d\ell})\overrightarrow{B_0}.$$

or

$$\begin{cases} \oint \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int r dr = 0 \\ \oint (\overrightarrow{r} \cdot \vec{B_0})\overrightarrow{d\ell} = -\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{B_0}) \wedge \overrightarrow{n}\, dS \end{cases},$$

où Σ est une surface de bord $\mathcal{C}$.

Remarquons que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{B_0}) = \overrightarrow{B_0}$; on en déduit l'expression du moment du couple exercé sur la boucle de courant :

$$\overrightarrow{\Gamma} = I\iint_\Sigma \overrightarrow{n}\, dS \wedge \vec{B_0} = I\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{B_0} = \overrightarrow{\mathscr{M}} \wedge \overrightarrow{B_0}$$

II.2 Cas d'un champ extérieur non uniforme

A correspond au centre d'un dipôle magnétique caractérisé par son moment dipolaire $\overrightarrow{\mathscr{M}}$. Ce dernier, plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ subit une action

- de résultante :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{\mathscr{M}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\overrightarrow{B}(A)}$$

- de moment en A :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{M}_A} = \overrightarrow{\mathscr{M}} \wedge \overrightarrow{B}(A)}$$

Énergie potentielle :

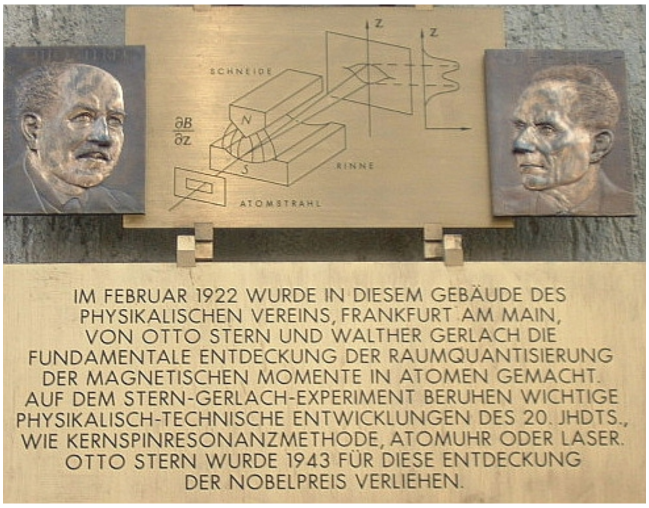
$$\boxed{\mathscr{E}_p = -\overrightarrow{\mathscr{M}} \cdot \overrightarrow{B}(A)}$$

Effet qualitatif : il apparaît un couple qui tend à aligner le dipôle avec le champ extérieur et une résultante qui entraîne le dipôle vers les zones de fort champ (si le champ est non-uniforme).

III L'expérience de Stern et Gerlach

Expérience de STERN et GERLACH

D'après une proposition de Laurent Beau - Lycée La Pérouse-Kerichen - Brest.



Plaque commémorative de l'expérience portant l'effigie des deux physiciens allemands Otto Stern et Walther Gerlach au siège de la Physikalische Verein à Francfort-sur-le-Main
(auteur : Peng)

En février 1922, dans ce bâtiment de l'association de physique, à Francfort-sur-le-Main, Otto Stern et Walther Gerlach firent la découverte fondamentale de la quantification spatiale des moments magnétiques des atomes. Sur l'expérience de Stern-Gerlach reposent des développements physiques et techniques importants du 20e siècle, tels la résonance magnétique nucléaire, l'horloge atomique ou le laser. Pour cette découverte, Otto Stern reçut le prix Nobel en 1943.

Traduction de C. Mohr.

Document 1 - Modèle de l'atome avant 1920

Modèle de Rutherford (1911)

Il s'agit d'un modèle planétaire : les électrons, chargés négativement, tournent autour du noyau, chargé positivement, de rayon très faible devant sa distance aux électrons. L'atome d'hydrogène est modélisé par

— un électron de masse m_e et de charge $-e < 0$ ayant une trajectoire circulaire autour d'un proton de charge $+e$ et nettement plus lourd que l'électron.

— Le proton exerce une force électrostatique attractive sur l'électron.

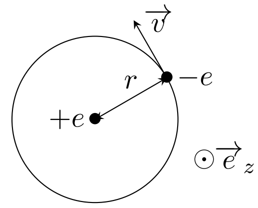
Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène (1913)

Dans le cadre de la physique classique, une charge électrique accélérée rayonne de l'énergie. Le modèle de RUTHERFORD conduit donc à des atomes instables, l'électron finissant par s'écraser sur le noyau. Niels BOHR améliore le modèle planétaire de RUTHERFORD en ajoutant les contraintes suivantes :

— les trajectoires possibles de l'électron sont celle qui satisfont à

$$m_e v r = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}$$

où r est le rayon de la trajectoire circulaire, v sa vitesse et n un entier naturel.



— l'électron n'émet ou n'absorbe de l'énergie que lors d'un changement d'orbite.

Nombres quantiques

Nombre quantique principal n — Nombre quantique entier naturel non nul. Dans la description non relativiste de l'atome d'hydrogène, les niveaux d'énergie ne dépendent que de n.

Nombre quantique secondaire (ou orbital) ℓ — Nombre quantique entier naturel $(0 \leq \ell \leq n-1)$ relié à la quantification du moment cinétique orbital $\overrightarrow{L}$:

$$L^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2$$

Nombre quantique magnétique m_ℓ — Nombre quantique entier vérifiant $-\ell \leq m_\ell \leq +\ell$ intervenant dans la quantification du moment cinétique : la projection suivant n'importe quel axe (Oz par exemple) d'un moment cinétique $\overrightarrow{L}$, caractérisé par un nombre quantique secondaire ℓ, vérifie $L_z = m_\ell\hbar$.

Document 2 - Expérience de Stern et Gerlach (1922)

En 1922, Otto Stern et Walther Gerlach mettent en place une expérience pour déterminer si le moment cinétique électronique $\overrightarrow{L}$ est quantifié comme le propose Sommerfeld. Pour cela, ils envoient des atomes d'argent à travers l'entrefer d'un électroaimant, zone où règne un champ magnétique inhomogène dirigé suivant une direction $(z'z)$ orthogonale à la vitesse initiale des atomes.

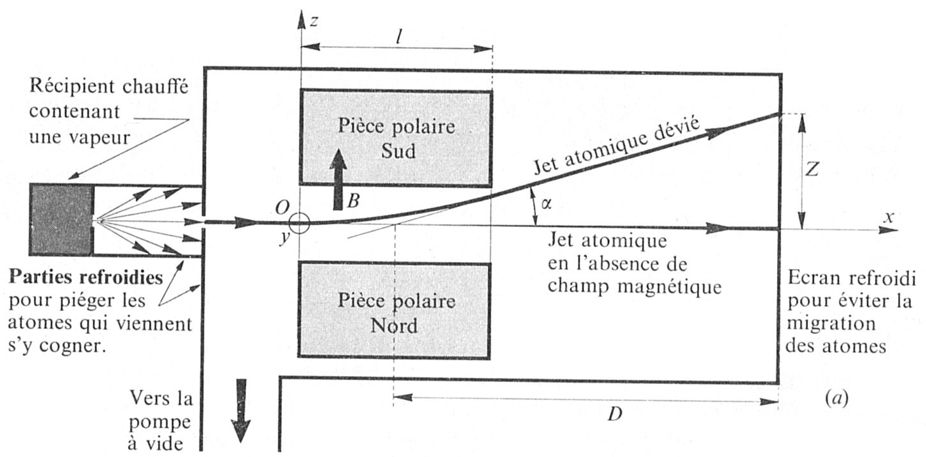


Figure 2 : Configuration de l'expérience de Stern et Gerlach

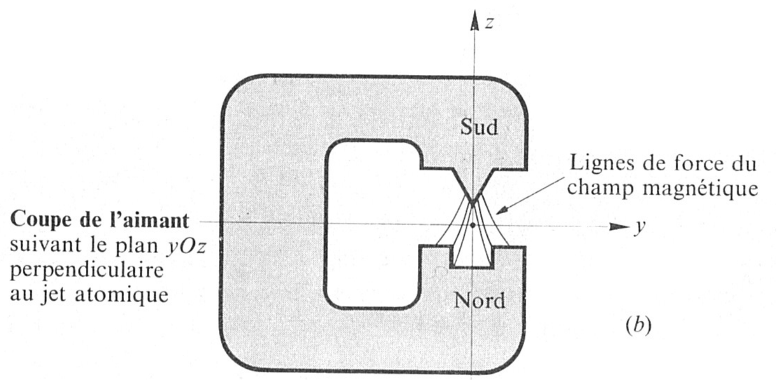


Figure 3 : Lignes de champ magnétique

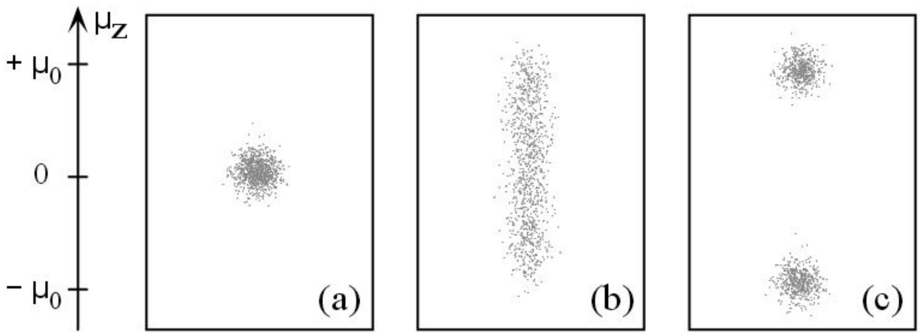


Figure 4 : Quelques simulations de l'expérience de Stern et Gerlach
(d'après Basdevant et Dalibard, *Cours de l'École polytechnique 2002*)

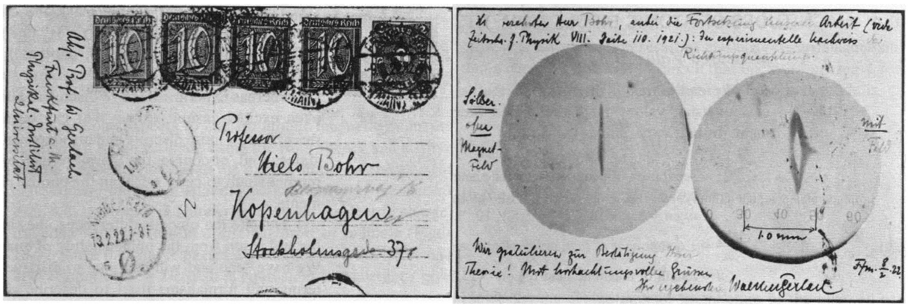


Figure 5 : Carte postale envoyée par Walther GERLACH à Niels BOHR le 8 février 1922 au sujet de l'expérience avec des atomes d'argent
(Source : Niels Bohr Archive).

Cher Monsieur Bohr,

Ci-joint la suite de notre travail (voir Journal de Physique VIII, page 110, 1921) concernant la preuve expérimentale de la quantification directionnelle.

[A gauche] : argent [silber], sans champ magnétique [ohne magnet feld]

[A droite] : avec champ [mit feld]

Nous vous félicitons pour la confirmation de votre théorie !

Avec mes salutations respectueuses

Bien à vous

Walther Gerlach

Traduction par C. MOHR du texte écrit par Walther GERLACH autour des deux disques.

Document 3 - Quelques données

L'argent

- Numéro atomique : $Z = 47$
- Configuration électronique dans l'état fondamental : $[\mathrm{Kr}]4d^{10}5s^1$

Actions subies par un dipôle magnétique

Un dipôle magnétique de moment dipolaire magnétique $\overrightarrow{\mu}$ situé en un point M dans un champ magnétostatique extérieur $\overrightarrow{B}(M)$ subit des actions dont la résultante $\overrightarrow{F}$ et le moment $\overrightarrow{\Gamma}$ en M sont

$$\overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{\mu}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\overrightarrow{B}(M)$$
$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mu} \wedge \overrightarrow{B}(M)$$

Pour un champ magnétique selon Oz et ne dépendant que de z,

$$\overrightarrow{F} = \mu_z \frac{dB_z}{dz}\overrightarrow{e_z}$$

Constantes physiques

Référence : J. Beringer et *al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D86, 010001 (2012) and 2013 partial update for the 2014 edition

Quantity	Symbol	Value
speed of light in vacuum	c	$299792458\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$
Planck constant	h	$6.62606957(29)\times 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$
electron charge magnitude	e	$1.602176565(35)\times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
electron mass	m_e	$9.10938291(40)\times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$

Questions

À partir des documents 1 à 3, répondre aux questions suivantes.

1. **Moment cinétique et moment magnétique orbitaux**
   (a) En adoptant le modèle de l'atome d'hydrogène purement classique de RUTHERFORD, exprimer le moment cinétique orbital $\overrightarrow{L}$ de l'électron en fonction de sa masse m_e, de sa vitesse v et du rayon r de l'orbite.
   (b) Exprimer le moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$ associé à la boucle de courant créée par le mouvement circulaire de l'électron, en fonction de v, r et de la charge élémentaire e.
   (c) En déduire la relation
   $$\overrightarrow{\mu} = \gamma \overrightarrow{L}$$
   où on exprimera γ.

2. **Dispositif de déviation**
   (a) Pourquoi les atomes d'argent ne subissent-il pas de force de Lorentz ?
   (b) Expliquer la nécessité d'un champ magnétique non uniforme dans l'expérience de STERN et GERLACH.
   (c) Reproduire la figure 3 et orienter les lignes de champ magnétique. Représenter $\overrightarrow{\text{grad}}B_z$ en un point de la ligne de champ parallèle à Oz.

3. **De l'analyse classique à la description quantique**
   (a) A l'aide du théorème du moment cinétique, montrer que dans le plan $x = 0$, $\mu_z = \overrightarrow{\mu}.\overrightarrow{e_z}$ est constant.
   (b) Dans une approche classique, on suppose que les atomes d'argent portent un moment magnétique de norme μ_0 et que ces moments ont une direction aléatoire quand les atomes entrent dans la zone de champ magnétique.

   La figure 4 donne trois simulations du résultat de l'expérience de STERN et GERLACH. Laquelle correspond au cas dans un champ magnétique uniforme ? Laquelle correspond à l'approche classique avec un champ magnétique inhomogène ?
   (c) La dernière simulation correspond à la véritable observation pour laquelle $\mu_0 = 9,27 \times 10^{-24}$ J $\cdot$ T^{-1}.

   Montrer que cette mesure est compatible avec une quantification du moment cinétique de l'atome : $L_z = \pm\hbar$.
   (d) Comme le montre la carte postale envoyée par GERLACH à BOHR, le faisceau d'atomes d'argent pénétrant dans l'électroaimant présentait une extension spatiale selon Ox. La carte postale montre deux résultats obtenus sans ou avec champ magnétique.

   Pourquoi STERN et GERLACH n'ont-ils pas observé deux segments parallèles lorsque le dispositif de déviation est actif ?

4. (a) Montrer que, dans son état fondamental, l'atome d'argent ne comporte qu'un électron de valence dont on donnera les nombres quantiques principal, secondaire et magnétique.
   (b) En admettant que seuls les électrons de valence contribuent au moment cinétique orbital, quelle(s) valeur(s) peut prendre la projection du moment cinétique orbital L_z pour l'atome d'argent ? Est-ce en accord avec le résultat de l'expérience de STERN et GERLACH ?
   (c) Visionner la vidéo `http://www.toutestquantique.fr/#magnetisme` et conclure.