Champ magnétostatique

Questions de cours

- Les lignes de champ magnétique sont-elles ouvertes ou fermées ?
- Rappeler l'équation locale de Maxwell-flux .
- Que peut-on dire du flux de champ $\overrightarrow{B}$?
- Énoncer le théorème d'Ampère, l'établir.
- Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air.

Applications directes du cours

$\boxed{1}$ Déterminer le champ magnétique créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité I.

Exercices

1. Champ créé par une sonde à effet Hall

Une sonde à effet Hall sert à mesurer le champ magnétique extérieur... Mais la sonde produit elle-même un champ car elle est parcourue par un courant ! Dans quelle mesure ce champ est-il négligeable ? On cherche alors à calculer le champ créé par la plaque conductrice d'une sonde à effet Hall modélisée par une plaque infinie. Un courant de densité volumique $\overrightarrow{j}$ circule entre deux plans infinis dans les directions x et y. On a $\overrightarrow{j} = j_0\overrightarrow{e_x}$ uniforme si $z \in [-a; a]$. En dehors de cet intervalle $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$. Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ en tout point de l'espace.

AN : Champ pour une sonde Au : $I_{max} = 200$ mA, épaisseur $2a = 0,14$ μm, largeur $\ell = 12$ mm.

2. Cylindre parcouru par un courant inhomogène

On considère un câble cylindrique de rayon R et d'axe z parcouru par un courant d'intensité I réparti de façon non uniforme au sein du câble,

$$\overrightarrow{j}(r) = J_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\overrightarrow{e_z}$$

1. Exprimer J_0 en fonction de I.
2. Calculer le champ magnétostatique créé par ce câble en tout point de l'espace.
3. Vérifier que le champ trouvé obéit bien à l'équation de Maxwell-Ampère.

Données : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rB_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$

3. Champ magnétique créé par un tore

On considère un tore de section carrée, d'axe Oz, l'origine O étant placée de telle façon que le tore se trouve dans l'espace comprise entre les côtes $z = -a/2$ et $z = +a/2$. On bobine uniformément sur ce tore, de façon jointive, N spires de fil électrique parcourues par un courant d'intensité I.

1. Déterminer la direction du champ magnétique en un point M quelconque et sa dépendance vis à vis des coordonnées d'espace. On notera (r, θ, z) les coordonnées cylindriques de M.
2. Déterminer à l'aide du théorème d'Ampère, l'expression de $\overrightarrow{B}(M)$ en tout point de l'espace.

4. Fil conducteur creux

Un fil conducteur épais de rayon R et d'axe (Oz) est parcouru par un courant de densité $j\overrightarrow{u_z}$ uniforme.

1. Déterminer le champ $\overrightarrow{B_0}$ en tout point M de l'espace.
2. Exprimer $\overrightarrow{B_0}$ en fonction de $\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{OM}$ pour $r < R$.
3. On suppose maintenant que le fil est creux et présente une cavité cylindrique parallèle à l'axe du cylindre mais décentrée par rapport à cet axe. Dans le reste du cylindre, la densité de courant est toujours égale à $\overrightarrow{j}$.
   Calculer le champ magnétique dans la cavité.

5. Distribution à géométrie cylindrique

On considère, en coordonnées cylindriques, le champ magnétique $\vec{B}$ défini par :

$$\overrightarrow{B} = B_0 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{r-a}{a}\right) \overrightarrow{e_\theta} \text{ pour } 0 \leq r \leq a$$

et

$$\overrightarrow{B} = B_0 \frac{a}{r} \overrightarrow{e_\theta} \text{ pour } r > a.$$

Déterminer les courants qui sont à l'origine de ce champ. (Le milieu considéré sera supposé comme étant équivalent au vide : $\mu = \mu_0$).

Données : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\, r B_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$

6. Câble coaxial en régime permanent

On cherche à préciser les propriétés d'un câble coaxial en régime permanent, et notamment de préciser un de ses avantages par rapport à un fil simple. Le câble coaxial rectiligne de longueur H est composé :

- d'une âme centrale cylindrique de rayon a, parcourue par un courant d'intensité I uniformément répartie sur l'enveloppe cylindrique,
- d'un cylindre de rayon b parcouru par un courant en sens opposé, de même intensité I, uniformément répartie sur l'enveloppe cylindrique.

1. Dans la limite du modèle du câble infini, déterminer l'expression du champ crée en tout point $r < a$, en $a < r < b$, et en $r > b$. Remarquez un avantage d'un tel câble par rapport à un fil simple.
2. Déterminer l'expression de l'énergie emmagasinée par une longueur ℓ de ce câble.
3. En déduire son inductance L, puis son inductance linéique Λ.

7. Bobines de Helmoltz

Une bobine plate circulaire d'axe (Oz), composée de N spires parcourues par un courant d'intensité I crée sur son axe un champ magnétique dont m'expression est la suivante :

$$\overrightarrow{B}(z) = \mu_0 N I \frac{R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \overrightarrow{e_z}$$

1. Champ au voisinage de l'axe.
   En dehors de l'axe, le champ magnétique possède une composante radiale B_r et une composante axiale (le long de Oz) B_z qui ne dépendent que des cordonnées r et z de M.

On s'intéresse au calcul approché de B_r pour des points très voisins de l'axe Oz, c'est-à-dire lorsque r est proche de zéro.
On pose : $B(z) = B_z(r = 0, z)$. En écrivant la conservation du flux de $\overrightarrow{B}$ à travers un cylindre d'axe Oz, de rayon r très petit et dont les bases inférieure et supérieure sont situées aux cotes z et $z + \mathrm{d}\, z$, montrer que, lorsque $\mathrm{d}\, z \to 0$:

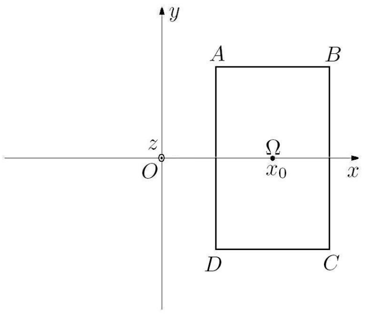
$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}\, B}{\mathrm{d}\, z}(z)$$

2. On considère deux bobines coaxiales identiques. Les bobines sont dites en configuration de Helmoltz lorsqu'elles sont séparées d'une distance R et parcourue par un même courant.
Montrer que le champ entre les deux bobines s'écrit alors :

$$\overrightarrow{B_0} = \frac{8\mu_0 NI}{\sqrt{125}R}\overrightarrow{e_z}$$

8. Inductance mutuelle entre un fil et un cadre rectangulaire

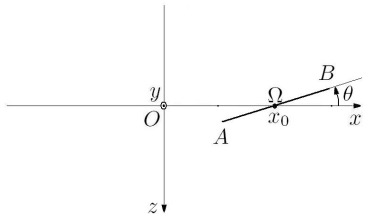
On considère un cadre $ABCD$, de centre Ω d'abscisse x_0, de côtés $AB = a$, $BC = d$ et un fil infini $y'y$ dans le plan du cadre.



1. Déterminer le coefficient d'inductance mutuelle du cadre et du fil.

2. Le fil étant parcouru par un courant d'intensité i constante, le cadre est en translation à la vitesse $v_0\overrightarrow{e_x}$. Déterminer la force électromotrice induite dans le cadre.

3. On fait pivoter $ABCD$ d'un angle θ autour de l'axe Ωy.



Déterminer le nouveau coefficient d'inductance mutuelle.