Opérateurs différentiels

I Champs scalaires et champs de vecteurs

1 Définitions

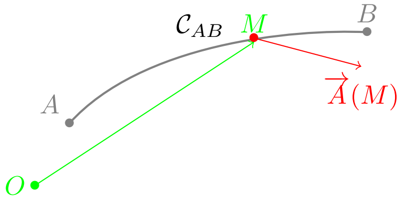
Un **champ scalaire** est une application qui à un point M de l'espace associe un scalaire $f(M)$.

Un **champ de vecteurs** est une application qui à un point M de l'espace associe un vecteur $\overrightarrow{A}(M)$.

2 Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe

Circulation sur un segment — Soit $\mathcal{C}_{AB}$ un segment de courbe limité par les points A et B ; la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{A}$ sur $\mathcal{C}_{AB}$ est :

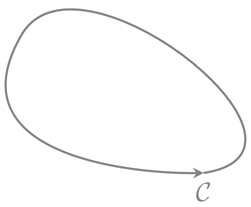
$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \overrightarrow{A}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}.$$



Circulation sur une courbe fermée — Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée orientée ; la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{A}$ sur $\mathcal{C}$ est :

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}.$$

Le symbole $\oint$ signifie que le point M effectue un tour sur la courbe fermée.

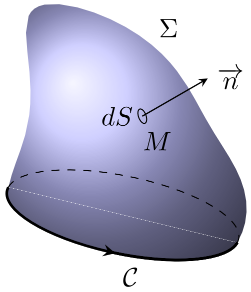


3 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

Flux à travers une surface ouverte — Soit Σ une surface ouverte de bord $\mathcal{C}$; la courbe $\mathcal{C}$ étant orientée, le flux du champ $\overrightarrow{A}$ à travers la surface est l'intégrale :

$$\Phi_\Sigma = \iint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{A}(M) \cdot \overrightarrow{n}\ dS_M$$

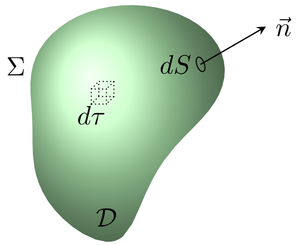
où $\overrightarrow{n}$ est orientée par la "règle du tire-bouchon".



Flux à travers une surface fermée — Soit Σ une surface fermée ; le flux du champ $\overrightarrow{A}$ à travers la surface est l'intégrale :

$$\Phi_\Sigma = \oiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{A}(M) \cdot \overrightarrow{n}\ dS_M$$

où $\overrightarrow{n}$ est orientée vers l'extérieur.



II Différentielle

1 Différentielle d'une fonction réelle d'une variable réelle

f étant une fonction réelle d'une variable réelle $x \to f(x)$, on appelle *différentielle* de f, notée df, l'application linéaire $dx \to df$ qui réalise la meilleure approximation de l'accroissement $f(x+dx) - f(x)$.

Dans le cas d'une variable unique, une application linéaire est une multiplication par une constante A, soit

$$df = Adx$$

En effectuant le développement à l'ordre 1 de f au voisinage de x, on peut écrire

$$f(x+dx) - f(x) = f'(x)dx + o(dx) \text{ donc } A = f'(x)$$

On en déduit que

$$df = f'(x)dx$$

Ceci justifie la notation différentielle de la dérivée :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Règles de calcul élémentaires : $\begin{cases} d(f+g) = df + dg \\ d(fg) = gdf + fdg \end{cases}$

Le théorème de dérivation composée $(f \circ u)'(x) = (f(u(x))' = u'(x)f'(u(x))$ se retrouve très facilement en utilisant la notation différentielle

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

2 Dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables

Introduisons cette notion sur l'exemple d'une fonction de deux variables :

$$(x, y) \to f(x, y).$$

Si on gèle la variable y pour la considérer comme un paramètre, on définit une fonction d'une variable $x \to F_y(x)$. Si la fonction F_y est dérivable, on définit la *dérivée partielle* de f par rapport à x par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = F'_y(x)$$

Les deux variables jouant des rôles symétriques, si on gèle la variable x pour la considérer comme un paramètre, on définit une fonction d'une variable $y \to G_x(y)$. Si la fonction G_x est dérivable, on définit la *dérivée partielle* de f par rapport à y par

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = G'_x(y)$$

3 Différentielle d'une fonction réelle de deux variables réelles

f étant une fonction réelle de deux variables réelles $(x, y) \to f(x, y)$, on appelle *différentielle* de f, notée df, l'application linéaire $(dx, dy) \to df$ qui réalise la meilleure approximation de l'accroissement $f(x+dx, y+dy) - f(x, y)$.

Dans le cas de plusieurs variables, une application linéaire n'est plus une simple multiplication par une constante A, mais une combinaison linéaire

$$df = Adx + Bdy$$

En effectuant le développement à l'ordre 1 de f au voisinage de x en gelant y, on peut écrire, en notant $\frac{\partial f}{\partial x}$ la *dérivée partielle* de f par rapport à x

$$f(x+dx, y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + o(dx) \text{ donc } A = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

On en déduit que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

4 Dérivées partielles secondes et théorème de Schwarz

Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont elles-mêmes des fonctions de deux variables, susceptibles d'être dérivées. On utilise les notations condensées :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, le *théorème de Schwarz* indique que l'ordre des dérivations est indifférent, soit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

III L'opérateur gradient

1 Définition

L'opérateur gradient est un opérateur différentiel qui s'applique à un champ scalaire (fonction scalaire dépendant de l'espace et du temps) et le transforme en un champ vectoriel (vecteur dépendant de l'espace et du temps). Il se lit « gradient » ou « nabla » et se note :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M,t) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{\nabla} f(M,t)$$

Soit f un champ scalaire ; df désignant la différentielle de f, le gradient de f est le champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ défini par :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Conséquences :

- Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M,t)$ est perpendiculaire à la surface de niveau de f passant par M à l'instant t.
- Le vecteur gradient est orienté vers les valeurs croissantes de f et sa norme mesure le taux de variation spatiale dans la direction de plus grande pente.

2 Expressions

a En coordonnées cartésiennes

$f(M,t) = f(x,y,z,t)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z,t) = \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

Ou plus simplement

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

b En coordonnées cylindriques

$f(M,t) = f(r,\theta,z,t)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

c En coordonnées sphériques

$f(M,t) = f(r,\theta,\varphi,t)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

3 Propriétés

L'opérateur gradient est un opérateur linéaire et vérifie donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\alpha f + \beta g) = \alpha\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f + \beta\, \overrightarrow{\text{grad}}\, g \quad \text{avec} \quad (\alpha,\beta) \in \Re^2$$

Le gradient d'un produit de champs scalaires vaut :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, fg = f\, \overrightarrow{\text{grad}}\, g + g\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f$$

où f et g sont deux fonctions de l'espace et du temps.

IV L'opérateur divergence

1 Définition

L'opérateur divergence est un opérateur différentiel qui s'applique à un champ vectoriel et qui renvoie un champ scalaire. Il se lit « divergence » et se note :

$$\text{div}\, \overrightarrow{A}(M,t) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}(M,t)$$

La divergence est une densité volumique de flux.
En choisissant un domaine $\mathcal{D}$ infinitésimal autour d'un point M, on peut exprimer la divergence dans un système de coordonnées quelconque.

2 Expressions de la divergence

a En coordonnées cartésiennes

On montre, en calculant le flux à travers un petit parallélépipède de côtés dx, dy, dz ayant pour coin le point $M(x, y, z)$, que l'expression en coordonnées cartésiennes de la divergence est :

$$\operatorname{div}\overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

b En coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div}\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

c En coordonnées sphériques

$$\operatorname{div}\overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

3 Propriétés

L'opérateur divergence est un opérateur linéaire et vérifie donc

$$\operatorname{div}(\alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}) = \alpha\operatorname{div}\overrightarrow{A} + \beta\operatorname{div}\overrightarrow{B} \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \Re^2$$

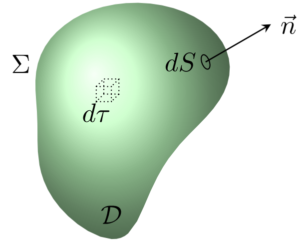
La divergence d'un produit vaut :

$$\operatorname{div}(f\overrightarrow{A}) = f\operatorname{div}\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f$$

4 Théorème de Green-Ostrogradski

Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée Σ limitant un domaine tridimensionnel $\mathcal{D}$ peut s'exprimer par l'intégrale sur $\mathcal{D}$ de la divergence de $\overrightarrow{A}$.

$$\iiint_{M\in\mathcal{D}} \operatorname{div}\overrightarrow{A}(M)d\tau_M = \oint\!\!\oint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{A}(M)\cdot\overrightarrow{n}\,dS_M.$$



V Opérateur rotationnel

1 Définition

L'opérateur rotationnel est un opérateur différentiel qui transforme un champ vectoriel en un autre champ vectoriel. Il se lit rotationnel et se note

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{A}(M,t) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A}(M,t)$$

Le rotationnel possède une signification intrinsèque : c'est une densité surfacique de circulation. En choisissant une surface orientée dS_M infinitésimale autour d'un point M, on peut exprimer le rotationnel dans un système de coordonnées quelconque.

$$\delta\mathcal{C}_M = \oint_{M\in\Gamma} \overrightarrow{a}(M)\cdot d\overrightarrow{\ell}_M = (\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{a}(M))\cdot\overrightarrow{dS}_M$$

2 Expressions du rotationnel

a En coordonnées cartésiennes

On montre, en calculant la circulation le long de petits rectangles de côtés (dx, dy) (dy, dz) et (dz, dx) ayant pour coin le point $M(x, y, z)$, que l'expression en coordonnées cartésiennes du rotationnel est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$$

b En coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

c En coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_\phi}\end{aligned}$$

3 Propriétés

L'opérateur rotationnel étant linéaire, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}\right) = \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} \quad \text{avec} \quad (\alpha,\beta)\in\Re^2$$

Le rotationnel d'un gradient est nul

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\right) = \overrightarrow{0}$$

La divergence d'un rotationnel est nulle.

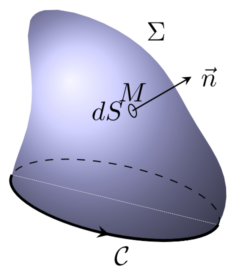
$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}\right) = 0$$

Le rotationnel d'un produit

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\overrightarrow{A}) = f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)\wedge\overrightarrow{A}$$

4 Théorème de Stokes

La circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe fermée orientée $\mathcal{C}$ limitant une surface ouverte Σ est égale au flux à travers Σ du rotationnel de $\overrightarrow{A}$:



$$\iint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}(M)\cdot\overrightarrow{n}\,dS_M = \oint_{M\in\mathcal{C}} \overrightarrow{A}(M)\cdot\overrightarrow{d\ell}_M$$

VI L'opérateur laplacien

1 Le laplacien scalaire

Définition — L'opérateur laplacien scalaire est un opérateur différentiel d'ordre deux qui transforme un champ scalaire en un autre champ scalaire. Le laplacien scalaire s'obtient en prenant la divergence du gradient et se note $\Delta f(M,t)$:

$$\Delta f = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\right).$$

Expression en coordonnées cartésiennes — On en déduit immédiatement que :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Expression dans d'autres systèmes de coordonnées — Il est moins immédiat [1] de montrer que, en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

ou

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1. Et ce n'est pas à connaître !

et, en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2},$$

ou

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}.$$

2 Laplacien d'un champ de vecteurs

Définition — Le laplacien s'applique également à un champ vectoriel. Dans ce cas il renvoie un autre champ vectoriel et se note

$$\Delta\overrightarrow{A}$$

Il est défini par :

$$\Delta\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}\right) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}\right)$$

Expression en coordonnées cartésiennes — Un calcul fastidieux montre les deux expressions pratiques suivantes :

$$\begin{cases} \Delta\overrightarrow{A} = \dfrac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial z^2} \\ \Delta\overrightarrow{A} = \Delta A_x\overrightarrow{e_x} + \Delta A_y\overrightarrow{e_y} + \Delta A_z\overrightarrow{e_z} \end{cases}$$

Expression en coordonnées cylindriques —

$$\Delta\overrightarrow{A} = \begin{matrix} \left(\dfrac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial r} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \dfrac{A_r}{r^2}\right)\overrightarrow{e_r} \\ \left(\dfrac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A_\theta}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial r} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_r}{\partial\theta} - \dfrac{A_\theta}{r^2}\right)\overrightarrow{e_\theta} \\ \left(\dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A_z}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_z} \end{matrix}$$

VII Opérateur nabla

$\overrightarrow{\nabla}$ est un opérateur vectoriel qui se manipule algébriquement comme un vecteur de composantes $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ sur la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

Il permet d'écrire les opérateurs usuels :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \overrightarrow{\nabla} f \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A} \\ \Delta f = \overrightarrow{\nabla}^2 f \\ \Delta\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{A} \end{cases}$$

Il permet de retrouver aisément la plupart des identités utiles citées dans le paragraphe suivant, mais **il ne permet pas de retrouver les composantes de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques ou sphériques**.

VIII Théorèmes utiles

Application de deux opérateurs d'ordre 1 — Ces résultats sont très importants !

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\right) = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}\right) - \Delta\overrightarrow{A} \\ \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\right) = \Delta f \\ \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}\right) = 0 \end{cases}$$

Commutation du laplacien avec les opérateurs d'ordre 1 :

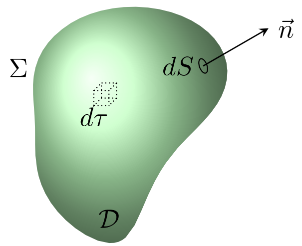
$$\begin{cases} \Delta\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\, (\Delta f) \\ \Delta\left(\text{div}\, \overrightarrow{A}\right) = \text{div}\, \left(\Delta \overrightarrow{A}\right) \\ \Delta\left(\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\, \left(\Delta \overrightarrow{A}\right) \end{cases}$$

Dérivation de produits — Ce sont aussi des résultats de grande importance dans la pratique des calculs.

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}\, (fg) = f\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f + g\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f \\ \text{div}\, \left(f \overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{A} + f\, \text{div}\, \overrightarrow{A} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\, \left(f \overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \wedge \overrightarrow{A} + f\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{A} \\ \text{div}\, \left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{A} - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{B} \end{cases}$$

1 Formules du gradient et du rotationnel

Ce sont deux conséquences de la formule de la divergence, qui transforment une intégrale triple en intégrale de flux :



$$\begin{cases} \displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\text{grad}}\, f\ d\tau = \oiint f\, \vec{n}\, dS & \text{formule du gradient} \\ \displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{A}\ d\tau = \oiint \vec{n} \wedge \overrightarrow{A}\, dS & \text{formule du rotationnel} \end{cases}$$

On peut retrouver les formules de la divergence, du gradient et du rotationnel par la règle mnémotechnique de substitution ci-dessous :

$$\begin{cases} \displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} d\tau \to \oiint dS \\ \overrightarrow{\nabla} \qquad \to \vec{n} \end{cases}$$

IX Champs remarquables

1 Champ de gradient

Définition : $\overrightarrow{A}$ est un champ de gradient s'il existe un champ scalaire Φ tel que $\overrightarrow{A} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, \Phi$. Φ est appelé potentiel scalaire de $\overrightarrow{A}$.

Propriété caractéristique : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\overrightarrow{A}$ soit un champ de gradient est que son rotationnel est nul.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{A} = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \Phi, \overrightarrow{A} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, \Phi.$$

Circulation d'un champ de gradient : La circulation d'un champ de gradient ne dépend pas du chemin suivi :

$$\int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{A}(M) \cdot \overrightarrow{dM} = \Phi(M_1) - \Phi(M_2);$$

en particulier, elle est nulle sur une courbe fermée :

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dM} = 0.$$

2 Champ de rotationnel

Définition : $\vec{B}$ est un champ de rotationnel s'il existe un champ de vecteurs $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$. $\vec{A}$ est appelé potentiel vecteur de $\vec{B}$.

Propriété caractéristique : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\overrightarrow{B}$ soit un champ de rotationnel est que sa divergence est nulle.

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0 \Leftrightarrow \exists \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}.$$

Flux d'un champ de rotationnel : Le flux d'un champ de rotationnel à travers une surface fermée Σ est nul :

$$\oiint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = 0.$$

3 Décomposition canonique

Théorème de décomposition — Tout champ de vecteurs est la somme d'un champ de rotationnel et d'un champ de gradient.

Théorème de Helmholtz — Dans le cas particulier d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ infiniment différentiable et à support borné [2] , on peut donner une expression explicite des potentiels dont dérive $\overrightarrow{V}$: on a, en notant $\mathcal{D}$ le support de $\overrightarrow{V}$:

$$\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}(M) - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi(M)$$

avec

$$\begin{cases} \overrightarrow{A}(M) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\iiint_{P\in\mathcal{D}} \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{rot}}_P\,\overrightarrow{V}(P)}{\|\overrightarrow{PM}\|} d\tau_P \\ \phi(M) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\iiint_{P\in\mathcal{D}} \dfrac{\mathrm{div}_P\,\overrightarrow{V}(P)}{\|\overrightarrow{PM}\|} d\tau_P \end{cases}$$

2. Nul en dehors d'un domaine borné.