# Équations de Maxwell

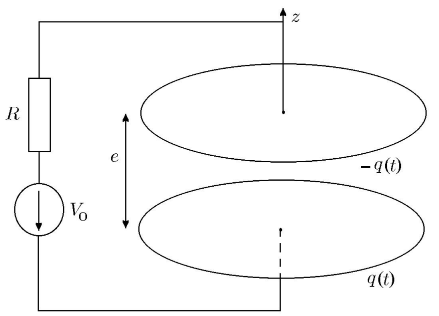
## Exercices

### 1. Bilan d'énergie dans un câble en régime permanent

Considérons un câble cylindrique de rayon $a$ d'axe $z$ parcouru par une densité de courant $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{e_z}$ uniforme et constante. Le matériau est de conductivité électrique $\sigma$. L'objectif de l'exercice est d'interpréter la puissance reçue par le matériau en terme de bilan d'énergie électromagnétique.

1. Exprimer l'intensité $I$ parcourant ce câble en fonction des données.
2. Déterminer le champ $\overrightarrow{E}$ dans tout l'espace.
3. Exprimer le champ $\overrightarrow{B}$ au bord du câble en $r = a$.
4. Exprimer le vecteur de Poynting puis calculer le flux d'énergie électromagnétique entrant dans un câble de longueur $h$.
5. Interpréter ce résultat en reconnaissant la résistance du câble.
6. Exprimer le champ $\overrightarrow{B}$ dans le câble. En déduire l'énergie électromagnétique totale contenue dans un câble de longueur $h$.

### 2. Étude énergétique de la charge d'un condensateur plan




Les armatures d'un condensateur plan, constituées de deux disques conducteurs, de rayon $a$, de même axe $Oz$ et séparés d'une distance $e$ sont reliées à un générateur de f.e.m. $V_0$ par une résistance $R$. Initialement, le condensateur est déchargé. À un instant quelconque où la tension à ses bornes vaut $V(t)$, ses armatures portent respectivement les charges $q(t) = CV(t)$ et $-q(t)$ où $C = \dfrac{\epsilon_0 S}{e}$ est la capacité du condensateur. On néglige les effets de bord ; en coordonnées cylindriques, le champ électromagnétique dans le condensateur est, en première approximation, de la forme :

$$\overrightarrow{E} = E(t)\overrightarrow{e_z} \quad ; \quad \overrightarrow{B} = B(r,t)\overrightarrow{e_\theta},$$

et le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur.

1. Déterminer $V(t)$ et l'énergie $U_C$ du condensateur dans l'état final.
2. À un instant quelconque, déterminer les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$.
3. En déduire la puissance électromagnétique $\mathcal{P}$ reçue par l'intérieur du condensateur, puis l'énergie électromagnétique $U_{em}$ emmagasinée par le condensateur au cours de sa charge.
4. Retrouver $U_{em}$ à l'aide de la densité d'énergie électromagnétique.

## 3. Courants de Foucault et feuilletage

Un flux magnétique variable à travers une masse de matériau conducteur y génère des courants, appelés courants de Foucault, qui dissipent alors de l'énergie par effet Joule. Le chauffage par induction fait partie des applications où on tire profit de ce phénomène. Au contraire, les courants de Foucault génèrent des pertes dans les dispositifs conducteurs soumis à des champs magnétiques variables (comme par exemple les matériaux ferromagnétiques au cœur des transformateurs). Considérons une plaque infinie entre les plans $z = -a$ et $z = a$ constituée d'un matériau de conductivité $\sigma$. Elles est soumise à un champ magnétique extérieur uniforme $\overrightarrow{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$ devant lequel on négligera le champ induit généré par les courants de Foucault. On admet que le champ électrique est de la forme $\overrightarrow{E} = E(z)\overrightarrow{u_y}$.

1. Déterminer $E(z)$ à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.
2. En déduire la densité de courant induite $\overrightarrow{j}$.
3. Montrer que la valeur moyenne de la puissance volumique transmise au matériau par le champ vaut $\langle P_V \rangle = \dfrac{1}{2} B_0^2 \sigma \omega^2 z^2$.
4. En déduire la puissance totale dissipée dans un bloc de métal d'épaisseur $2a$ suivant $z$, de largeur $b$ suivant $x$, et de longueur $L \gg a$ suivant $y$. On trouve $P \propto a^3$.
5. On feuillette le matériau en le coupant en $N$ tranches d'épaisseur $2a/N$ séparées par une très mince couche d'isolant. Expliquer l'intérêt de ce feuilletage.

## 4. Bilan énergétique pour un solénoïde dans l'ARQS

Un solénoïde d'axe $z$ comporte $n$ spires par unité de longueur. Il est assez long pour pouvoir être considéré comme infini.

1. Rappeler l'expression du champ magnétique créé par ce solénoïde lorsque le courant $I$ est constant.

   On étudie dans la suite le cas d'un courant variable. Il est donné par $i(t) = I_0 exp(-t/\tau)$. On suppose néanmoins que cette variation est assez lente pour pouvoir faire l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Au fur et à mesure de la décroissance de $i$, l'énergie emmagasinée par le solénoïde va décroître. Nous étudions ici plus en détail cette décroissance.

2. Donner la conditions portant sur $\tau$, la vitesse de la lumière $c$ et le rayon $R$ du solénoïde pour que cette approximation puisse être faite. Rappeler la forme que prennent les équations de Maxwell dans ce cas.
3. Montrer que dans ce cas le champ magnétique est le même que ce lui qui serait obtenu en régime statique, avec un courant qui vaut $i(t)$ à l'instant $t$. Donner l'expression de ce champ magnétique, puis déterminer l'expression de l'énergie volumique magnétique $u_m$ correspondante.
4. On s'intéresse maintenant au champ électrique. On admet que le champ électrique se met sous la forme $\overrightarrow{E}(M,t) = E(r,t)\overrightarrow{u_\theta}$.
   En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday et en appliquant le théorème de Stokes , montrer que $\overrightarrow{E} = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$.
   En déduire l'expression de $\overrightarrow{E}$, puis celle de l'énergie volumique électrique $u_e$.
5. Montrer que $\dfrac{u_e}{u_m} = \left(\dfrac{r}{2c\tau}\right)^2$. En déduire que $u_e \ll u_m$ ici. Dans la suite, on négligera donc $u_e$ devant $u_m$.
6. Calculer l'expression du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$, et vérifier que l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique (équation de Poynting ) est bien vérifiée.
7. Bilan d'énergie global : on considère une portion de solénoïde de longueur $h$ selon l'axe $z$ du solénoïde (volume intérieur du solénoïde, compris entre $z = 0$ et $z = h$ par exemple). Calculer l'énergie $U_{em}$ que contient cette portion à l'instant $t$, ainsi que le flux $\Phi_\Pi$ du vecteur de Poynting à travers la surface délimitant cette portion. Vérifier que la variation $\dfrac{dU_{em}}{dt}$ de $U_{em}$ au cours du temps est égale à $-\Phi_\Pi$.

## 5. Effet Meissner dans une plaque supraconductrice

Dans un matériau supraconducteur, il existe une densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ liée au champ magnétique $\overrightarrow{B}$ par la relation $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{j} = -\dfrac{1}{\mu_0\lambda^2}\overrightarrow{B}$ (appelée équation de London ), où $\lambda$ est une constante positive, caractéristique du matériau.

1. Déterminer l'équation aux dérivées partielles satisfaite en tout point intérieur au matériau par le champ magnétique $\overrightarrow{B}$, en régime statique.
2. On considère une plaque supraconductrice d'épaisseur $2d$, dont les faces sont de dimensions très grandes devant $d$ pour pouvoir négliger les effets de bord.
   On choisit l'origine d'un repère orthonormé direct $(Oxyz)$ au milieu de la plaque, l'axe $(Oz)$ étant perpendiculaire à ses faces qui ont pour équation $z = -d$ et $z = +d$. Cette plaque est plongée dans un champ magnétique, qui, en l'absence de plaque, est statique et uniforme, égal à $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{u_x}$.
   (a) Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ à l'intérieur de la plaque en supposant que $\overrightarrow{B}(d) = \overrightarrow{B}(-d) = \overrightarrow{B_0}$.
   (b) En déduire le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$ à l'intérieur de la plaque.
3. Un modèle microscopique donne $\lambda^2 = \dfrac{m}{\mu_0 n_s e^2}$, où $m$ est la masse de l'électron, $e$ la charge élémentaire et $n_s$ la densité volumique d'électrons supraconducteurs.
   On donne $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H.m$^{-1}$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg et $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

   (a) Calculer $\lambda$ pour $n_s = 1,0 \cdot 10^{29}$ m$^{-3}$.
   (b) Tracer les graphes des composantes non nulles de $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{j}$ en fonction de $z$.
   (c) Calculer l'épaisseur minimale $2d_m$ de la plaque pour que le champ en son milieu soit inférieur à $B_0/100$
   (d) Pour $d \gg \lambda$, à quelle distance de la surface de la plaque la densité de courant est-elle réduite à un centième de sa valeur à la surface ?

## 6. Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres métalliques creux, de même axe $Oz$, de rayons $R_1$ et $R_2$. Ailleurs que sur les deux conducteurs, on considère que le milieu a les propriétés magnétiques du vide. Les cylindres sont parcourus par des courants répartis de façon uniforme sur leur surface et en sens inverse l'un de l'autre avec $\mathrm{I}(t, z) = I_0 \cos(\omega t - kz)$. Il existe alors dans tout l'espace un champ électromagnétique de la forme suivante :

$$\overrightarrow{B}(M,t) = B(r,\theta,z,t)\overrightarrow{e_\theta} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{E} = E(r,\theta,z,t)\overrightarrow{e_r}$$

1. Justifier les vecteurs directeurs des champs.
2. En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique dans les trois régions de l'espace. Pour cette question, on se placera dans l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP).
3. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, trouver une relation entre $\dfrac{\partial B}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial E}{\partial z}$. En déduire l'expression du champ électrique.
4. Montrer que la relation de Maxwell-Ampère est vérifiée si $k$ et $\omega$ vérifient une relation simple à déterminer.
5. Déterminer le vecteur de Poynting et en déduire la direction de propagation de l'énergie. Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers une section droite du câble.
6. Déterminer la densité volumique d'énergie et en déduire la vitesse de propagation de l'énergie.

Données :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

## 7. Décharge d'un conducteur dans l'air

Une boule conductrice, de centre $O$ et de rayon $R$, porte initialement la charge $Q_0$ uniformément répartie sur sa surface. Elle est abandonnée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité $\gamma$ et initialement localement neutre : $\rho(M, t = 0) = 0$ en tout point $M$ à l'extérieur de la boule.
On cherche le champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t))$ en un point $M$ de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques de centre $O$.

1. Déterminer $\overrightarrow{E}(M, t = 0)$ à l'extérieur de la boule.
2. Déterminer $\overrightarrow{B}(M,t)$ à l'extérieur de la boule.
3. En utilisant l'identité de Poynting, $\dfrac{\partial u_{em}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\overrightarrow{\Pi} = -\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}$, trouver le champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ à l'extérieur de la boule.

4. Montrer que $\rho(M,t) = 0$ à l'extérieur de la boule.
5. Déterminer la charge $Q(t)$ portée par la boule à l'instant $t$.
6. Calculer de deux façons différentes l'énergie totale dissipée dans le milieu entre les instants $t = 0$ et $t = \infty$. Commenter.