



Devoir surveillé n°3

Samedi 30 novembre 2024

N.B. : vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES :

Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.

Ne pas utiliser de correcteur.

Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les copies relatives au problème 1 seront collectées à 10h.

Première partie

Énergie d'un noyau

La filière nucléaire représente actuellement près de 75% de l'énergie électrique produite en France. Bien que la physique mise en jeu lors d'une réaction de fission puisse s'avérer très complexe, une modélisation simple du noyau suffit pour saisir l'essentiel du problème : on parle du « modèle de la goutte liquide ». Nous nous intéressons uniquement à sa composante électrostatique pour retrouver l'ordre de grandeur de l'énergie libérée par une réaction de fission.

Le noyau atomique est modélisé par une boule de rayon R uniformément chargée en volume et on note ρ la densité volumique de charge électrique.

I Champ électrostatique

Nous utilisons les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , où le centre du noyau constitue l'origine O du repère.

1. Par des considérations de symétries, montrer que le champ créé en un point M à une distance r du centre O peut s'écrire $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.
2. (a) Déterminer ce champ en un point M à l'extérieur du noyau ($r > R$).
(b) Déterminer ce champ en un point M à l'intérieur du noyau ($r \leq R$).

II Énergie électrostatique

3. On cherche à exprimer l'énergie électrostatique sous la forme

$$\mathcal{E} = K(4\pi\epsilon_0)^\alpha Q^\beta R^\gamma$$

où K, α, β, γ sont des constantes adimensionnées. Déterminer α, β, γ par des considérations dimensionnelles.

4. (a) Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie liée au champ électrique.
 (b) Montrer que dans le cas présent, l'énergie électrostatique \mathcal{E} peut s'écrire comme la somme de deux intégrales, portant respectivement sur l'intérieur et l'extérieur du noyau.
 (c) Déterminer la constante adimensionnée K .
5. On rappelle que l'énergie potentielle d'un ensemble de N particules ponctuelles chargées peut s'écrire

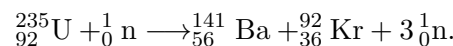
$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

où q_i est la charge de la particule i et V_i le potentiel créé à sa position par les $N - 1$ autres charges du système.

- (a) Pour une distribution continue décrite par une densité volumique de charge $M \rightarrow \rho(M)$, cette expression se transpose en une intégrale triple ; exprimer cette intégrale triple.
 (b) Calculer le potentiel créé par le noyau décrit dans la première partie.
 (c) En déduire l'énergie potentielle \mathcal{E}_p des particules chargées du noyau et la comparer à \mathcal{E} .

III Réaction de fission

De nombreuses réactions de fission différentes mettant en jeu l'uranium 235 se passent au sein d'un réacteur nucléaire. Nous nous intéressons à l'une d'entre elles, dont le bilan est :



Cette réaction libère une énergie de l'ordre de 200 MeV. La constante de Coulomb est $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ N.m}^{-1}.\text{C}^{-2}$.

La densité volumique de nucléons dans les noyaux est $\mu = 0,14 \text{ fm}^{-3}$.

6. Évaluer le rayon R des différents noyaux impliqués dans la réaction de fission citée.
 7. En déduire l'énergie électrostatique libérée lors de la réaction de fission et comparer sa valeur à celle annoncée.
 8. Cette approche permet-elle d'expliquer le phénomène de fusion nucléaire ?

Deuxième partie

Étude de la force de van der Waals

Lorsque deux atomes présentant un moment dipolaire électrique sont à distance suffisante, ils interagissent entre eux sous forme d'interaction dipôle – dipôle. Ce problème cherche à expliquer le principe de cette interaction.

- Q 1.** Rappeler la définition d'un dipôle électrostatique et de son moment dipolaire \vec{p} (il est conseillé de s'appuyer sur un dessin).
- Q 2.** Donner un exemple de dipôle électrostatique rencontré dans la nature ainsi que l'ordre de grandeur du moment dipolaire de l'exemple choisi.

Le potentiel électrique d'un dipôle électrostatique placé à l'origine O évalué en un point M situé à grande distance de O s'écrit

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{OM}\|^3}.$$

- Q 3.** À quelle condition peut-on considérer que le point M se trouve à grande distance de O ?
- Q 4.** Déterminer dans le système de coordonnées sphériques (Figure 1) le champ électrique créé par le dipôle en un point M en fonction des variables $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et θ .

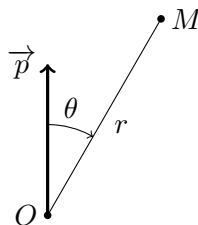


Figure 1

- Q 5.** Tracer schématiquement sans démonstration les lignes de champ électrostatique associées au dipôle.

Polarisabilité d'un atome

Lorsqu'un atome est soumis à un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} uniforme à l'échelle de l'atome on constate qu'il acquiert alors un moment dipolaire \vec{p}_{ind} , dit *moment dipolaire induit* vérifiant

$$\vec{p}_{\text{ind}} = \alpha\epsilon_0 \vec{E}_{\text{ext}}$$

où α s'appelle la polarisabilité de l'atome.

- Q 6.** Justifier qualitativement la relation précédente et donner l'unité de α dans le système international d'unités. Justifier que α est une grandeur positive.

Pour déterminer un ordre de grandeur de α , on peut utiliser le modèle de l'atome d'hydrogène proposé en 1904 par le physicien anglais Sir Joseph John Thomson (1856–1940) :

- l'atome est assimilé à une sphère de centre O et de rayon a ;
- la charge positive e de l'atome est répartie uniformément dans le volume intérieur de cette sphère ;
- la sphère est supposée fixe dans un référentiel galiléen propre à l'étude, auquel on associe le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$;
- l'électron se déplace librement à l'intérieur de la sphère ;
- on néglige l'interaction gravitationnelle devant l'interaction électromagnétique.

- Q 7.** Quelle est l'expression de la force ressentie par l'électron en fonction des données du problème et de la position de l'électron ? Commenter.
- Q 8.** On ajoute maintenant un champ extérieur \vec{E}_{ext} supposé uniforme sur la dimension de l'atome. En admettant que l'électron reste dans la sphère de rayon a , déterminer sa position d'équilibre.
- Q 9.** En déduire une expression de α dans le cadre de ce modèle et proposer un ordre de grandeur.

Interactions entre atomes de rubidium

Les atomes de rubidium ($Z = 37$) servant à l'étude des interactions de van der Waals, ne possèdent pas de moment dipolaire propre, tout comme l'atome d'hydrogène étudié précédemment. Néanmoins, ils peuvent posséder des moments dipolaires induits et la force qui existe entre deux atomes, résulte de l'interaction entre ces deux moments dipolaires induits.

- Q 10.** Proposer une explication qualitative de ce phénomène.

Pour modéliser le phénomène, on considère deux dipôles alignés sur un axe (Ox) et espacés d'une distance $x = O_1O_2$ (Figure 2).



Figure 2

- Q 11.** À partir de l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ extérieur, montrer que la force exercée par le premier dipôle sur le second dipôle peut s'écrire sous la forme

$$\vec{F}_{1/2} = p_2 \frac{dE_1}{dx} \vec{e}_x$$

où E_1 est la composante selon \vec{e}_x du champ électrique créé par le dipôle p_1 à l'abscisse x (au niveau de p_2).

- Q 12.** En déduire que cette force peut se mettre sous la forme

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{K}{x^7} \vec{e}_x$$

où K est une constante dont on précisera le signe.

- Q 13.** Cette force est-elle attractive ou répulsive ? Comment pouvait-on prévoir ce résultat sans calcul ?

- Q 14.** En déduire l'énergie potentielle d'interaction entre les deux dipôles.

Données et formulaire

Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$

Énergie potentielle d'un dipôle électrique de moment dipolaire \vec{p} dans un champ extérieur \vec{E}

$$E_{\text{pot}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

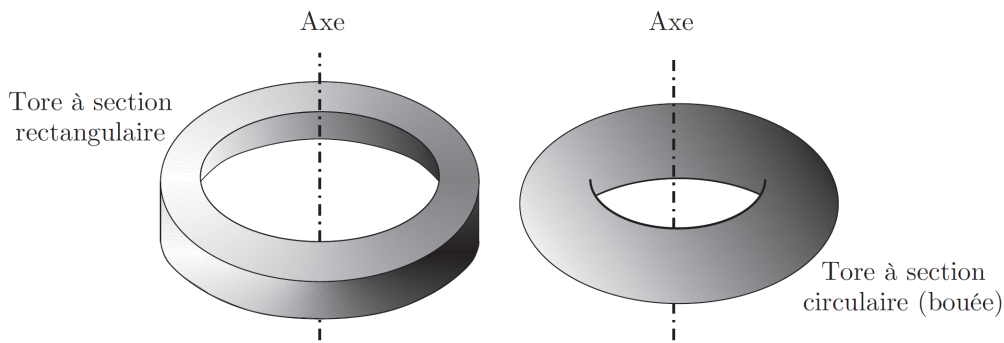
Expression du gradient en coordonnées sphériques

$$\vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

Troisième partie

De la physique autour d'un tore

Un tore est le volume engendré par la révolution autour d'un axe d'une figure géométrique donnée (dans le problème, ce sera un rectangle ou un cercle, voir figure 1) appelée section et inscrite dans un plan passant par l'axe. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires (\hat{u}_z) ou d'une flèche dans le cas général (\vec{p}).



A. Étude d'un conducteur ohmique torique

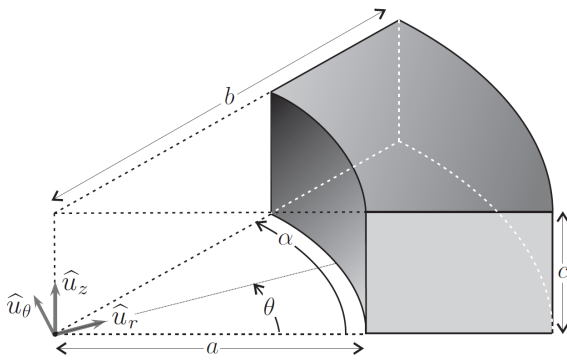


Figure 2 - Portion d'un conducteur torique

Un conducteur ohmique est caractérisé par une conductivité électrique γ de l'ordre de 10^8 S.m^{-1} . Il forme un tore tronqué de section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , d'épaisseur c .

On cherche à déterminer la résistance orthoradiale R d'une portion de ce conducteur comprise entre les angles $\theta = 0$ où on applique un potentiel uniforme $V = U$ et $\theta = \alpha$ où on applique un potentiel $V = 0$.

1. Établir, dans un conducteur ohmique, l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge ρ . En déduire que $\rho \simeq 0$ tant que la durée T caractéristique de variation des grandeurs électromagnétiques est très supérieure à une durée τ dont on donnera l'expression en fonction de γ et ϵ_0 ainsi que la valeur numérique.
2. Établir l'équation vérifiée en régime stationnaire et dans le conducteur ohmique par le potentiel électrique V .

3. On suppose que V ne dépend que de l'angle θ en coordonnées cylindriques et on donne, dans ce système de coordonnées, les expressions du gradient du potentiel $\vec{\text{grad}} V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$ et de son laplacien $\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$. Déterminer les expressions de $V(\theta)$, du champ \vec{E} et de la densité de courant \vec{j} .
4. Déterminer l'expression de l'intensité totale I traversant une section rectangulaire droite quelconque de ce tore. En déduire sa résistance orthoradiale R en fonction de a, b, c, γ et α .
5. Rappeler l'expression de la résistance d'un conducteur filiforme de section S et de longueur L . Vérifier qu'elle est cohérente avec l'expression du conducteur torique quand b est très proche de a .

B. Étude d'une pince ampèremétrique

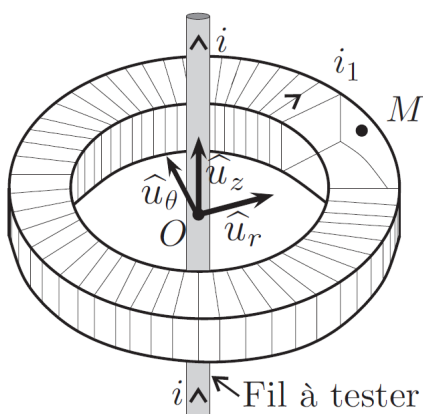


Figure 3 - Partie active de la pince

Une pince ampèremétrique est un appareil dont l'extrémité possède la forme d'un tore. En disposant ce tore autour d'un conducteur parcouru par un certain courant le dispositif équipant la pince permet d'en mesurer l'intensité.

Son principal intérêt est l'absence de contact physique avec le conducteur et le fait qu'il ne soit pas nécessaire d'ouvrir le circuit pour mesurer le courant qui le traverse contrairement à l'implantation d'un ampèremètre classique.

Le dispositif de mesure de la pince ampèremétrique est formé d'un bobinage torique comportant N spires enroulées sur un tore de section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , d'épaisseur c , d'axe (O, z) . Le fil conducteur utilisé pour le bobinage possède une résistance linéique λ .

Un point M intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques :

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z \text{ avec } r \in [a, b] \text{ et } z \in [0, c].$$

Un fil rectiligne infini de même axe (O, z) est parcouru par un courant d'intensité i . On note i_1 l'intensité du courant circulant dans la bobine torique. On se place en régime stationnaire.

6. Montrer qu'au point M intérieur au tore, le champ magnétique peut se mettre sous la forme $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$ où l'on précisera l'expression de $B(r)$ en fonction de μ_0, i, i_1, N et r .
7. Calculer le flux Φ de \vec{B} à travers le bobinage et en déduire les expressions des coefficients d'autoinductance L du bobinage et de mutuelle inductance M entre le fil et le bobinage.

On se place en régime sinusoïdal forcé avec $i(t) = I_0 \sqrt{2} \cos(\omega t)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i} = I_0 \sqrt{2} e^{j\omega t}$ et $i_1(t) = I_1 \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_1)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i}_1 = I_1 \sqrt{2} e^{j\omega t} e^{j\varphi_1}$.

8. Le bobinage formant un circuit fermé, déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}}$ en fonction de M, ω, R_p et L .
9. Dans quel régime de pulsation ce dispositif peut-il former une pince ampèremétrique ?

Quatrième partie

Conductivité dans un semi-conducteur

On donne les constantes physiques suivantes :

Charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 2,997792458 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$
Constante de Planck	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

On se propose d'étudier les effets d'un champ magnétique uniforme et stationnaire sur les propriétés électromagnétiques d'un matériau semi-conducteur. Le milieu matériel, électriquement neutre, est décrit comme un ensemble d'électrons (charge $-e$) évoluant au sein d'un réseau constitué de charges positives fixes. Les interactions de ces électrons "de conduction" avec le milieu sont entièrement prises en compte en leur affectant une masse effective m (différente de celle m_e d'un électron dans le vide) et en introduisant une force de "frottement" d'expression $-\alpha \vec{v}$, où α est un coefficient positif, caractéristique du milieu : la vitesse \vec{v} décrit la dérive moyenne de l'ensemble des électrons par rapport au réseau sous l'action d'un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) .

On considère un échantillon parallélépipédique dont le volume est délimité par les plans

$$x = 0, x = L, y = 0, y = \ell, z = -a/2 \text{ et } z = a/2 \quad (\text{Figure 1})$$

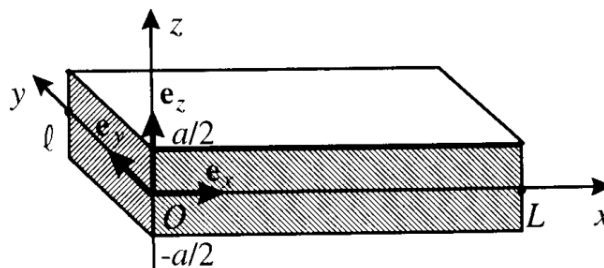


Figure 1

- Dans ce matériau, on applique un champ électrique \vec{E} stationnaire. Écrire l'équation du mouvement d'un électron animé d'une vitesse \vec{v} . À un instant pris comme origine, ce champ est brusquement annulé, déduire l'évolution ultérieure de la vitesse de l'électron et donner une signification physique au coefficient $\tau = m/\alpha$.
 - En régime stationnaire, montrer qu'en présence d'un champ électrique \vec{E} , le courant volumique \vec{J} vérifie bien la loi d'Ohm. En déduire la conductivité électronique γ en fonction de e , τ , m et de la densité volumique n des électrons de conduction.
 - Dans un matériau semi-conducteur, tel que l'arséniure de gallium GaAs dopé au silicium, la conduction est assurée par des électrons dont la masse effective m est $0,06 m_e$. Sachant qu'à très basse température la valeur de la conductivité vaut $\gamma = 100 \text{ S.m}^{-1}$, calculer τ pour $n = 10^{24} \text{ m}^{-3}$.
 - Un courant de densité volumique stationnaire circule parallèlement à l'axe Ox : $\vec{J} = J\vec{e}_x$. L'épaisseur a étant faible devant les dimensions latérales L et ℓ , l'échantillon est assimilé à un plan infini d'épaisseur a . À l'aide des symétries d'une telle distribution, préciser l'orientation du champ magnétique \vec{b} qu'elle crée en tout point de l'espace. Justifier le fait que ce champ est nul dans le plan $z = 0$. À partir de la forme locale du théorème d'Ampère, calculer \vec{b} au sein du plan épais. Trouver sa valeur maximale pour $a = 10 \mu\text{m}$ et $J = 10^6 \text{ A.m}^{-2}$.

2. (a) L'échantillon est désormais plongé dans un champ magnétique extérieur \vec{B} , uniforme et stationnaire, dirigé selon Oz , $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse \vec{v} d'un électron du matériau soumis à la force de frottement et à ce champ magnétique.
- (b) On prend en compte les effets d'un champ électrique \vec{E} , parallèle au plan Oxy , et du champ \vec{B} appliqué précédent. On néglige le champ magnétique créé par le milieu. Les effets d'amortissement sont toujours décrits par la force de frottement $-\alpha\vec{v}$. Établir, en régime stationnaire, les relations liant les composantes J_x et J_y du courant volumique aux composantes E_x et E_y du champ électrique. Montrer qu'elles peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix}$$

dans laquelle :

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = 1/\gamma \text{ et } \rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{ne}.$$

- (c) L'échantillon a la forme d'un ruban allongé selon Oy : $a \ll L \ll \ell$ (Figure 2.a). On applique une différence de potentiel V entre les plans $x = 0$ et $x = L$ métallisés. Le champ électrique \vec{E} est supposé uniforme : $\vec{E} = E\vec{e}_x$. Calculer la résistance d'un tel échantillon. Quelle est la modification relative induite par le champ magnétique (effet de magnétorésistance) ? Calculer cette modification pour $B = 1 \text{ T}$, $\gamma = 100 \text{ S.m}^{-1}$, $n = 10^{24} \text{ m}^{-3}$ et $m = 0,06 m_e$.

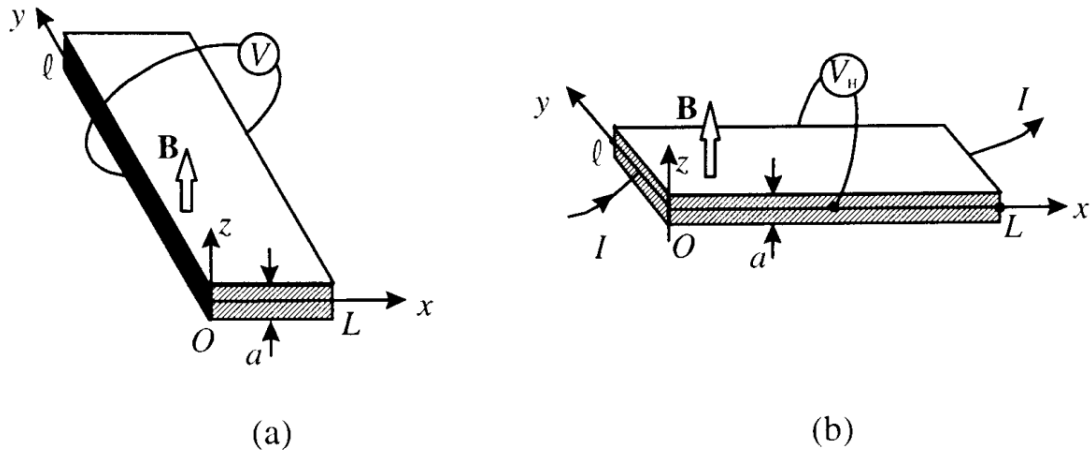


Figure 2

- (d) L'échantillon a la forme d'un ruban allongé selon Ox : $a \ll \ell \ll L$ (Figure 2.b). Un courant stationnaire d'intensité I circule selon cette direction avec un courant volumique uniforme : $\vec{J} = J\vec{e}_x$. Montrer que le champ électrique possède alors une composante E_y non nulle. Donner l'expression de la différence de potentiel V_H appelée tension de Hall, qui apparaît entre les plans $y = 0$ et $y = \ell$. Calculer V_H pour $I = 1 \text{ mA}$, $a = 10 \mu\text{m}$, $n = 10^{24} \text{ m}^{-3}$ et $B = 1 \text{ T}$. Quel est l'intérêt d'un tel dispositif ?
- (e) Des mesures effectuées à très basse température (quelques K) sur un échantillon de GaAs d'épaisseur très faible ($a = 10 \text{ nm}$), placé dans un champ magnétique intense (B de quelques teslas), montrent que la composante ρ_{xy} varie en fonction de B par paliers. Cet effet, découvert par Von Klitzing en 1980, porte le nom d'effet Hall quantique : la répartition des électrons en niveaux d'énergie conduit à écrire la densité volumique des électrons sous la forme : $n = peB/(ah)$ où p est un entier non nul et h la constante de Planck. Montrer que, dans ce cas, la valeur de la résistance transverse, définie selon $R_t = V_H/I$, se met sous la forme :

$$R_t = R_K/p,$$

R_K étant une résistance que l'on calculera. Pourquoi la résistance R_K , appelée constante de Klitzing, est-elle désormais utilisée comme étalon ?