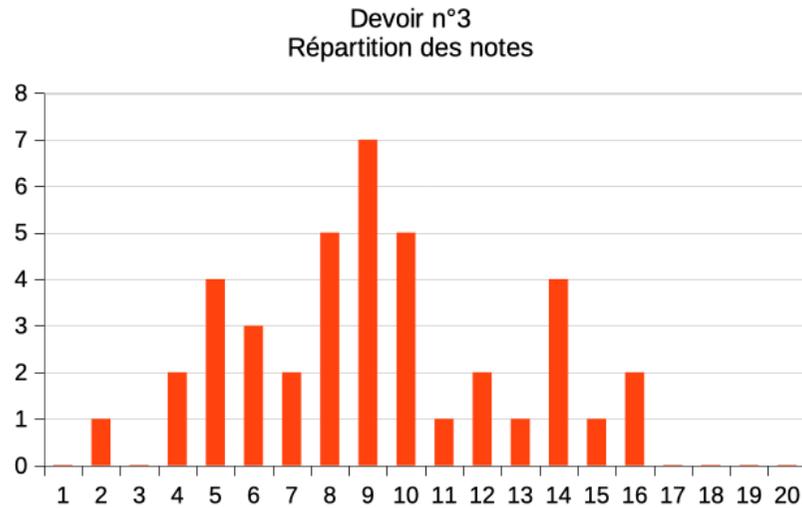


Meilleure note : 16,5

Moyenne : 9,4

Médiane : 9,0

Écart-type : 3,5



## Première partie

# Énergie d'un noyau

## I Champ électrostatique

1. La distribution volumique de charge est invariante par rotation quelconque autour du centre  $O$ . Les composantes du champ électrique sur la base locale  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$  sont donc indépendantes de  $\theta$  et de  $\phi$ .

Soit  $M$  un point à une distance  $r$  du centre  $O$ .

Le plan  $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est un plan de symétrie pour la distribution de charges ; c'est donc aussi un plan de symétrie pour le champ électrique. De même, le plan  $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$  est un plan de symétrie pour la distribution de charges ; c'est donc aussi un plan de symétrie pour le champ électrique. Le champ électrique en  $M$  est donc parallèle à ces deux plans ; il est donc colinéaire à  $\vec{e}_r$ .

Le champ électrique peut donc s'écrire

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$$

2. a) Soit  $\Sigma$  une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$  (surface de Gauss) ; le flux de  $\vec{E}$  à travers cette surface est

$$\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E(r) \iint_\Sigma dS = 4\pi r^2 E(r)$$

Pour  $r > R$ , la charge à l'intérieur de  $\Sigma$  est la charge totale du noyau, soit

$$Q_\Sigma = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Le théorème de Gauss nous donne

$$\Phi_\Sigma = \frac{Q_\Sigma}{\epsilon_0}$$

soit

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

et finalement

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \text{ pour } r > R$$

b) Pour déterminer le champ en un point  $M$  à l'intérieur du noyau ( $r \leq R$ ), on garde une surface de Gauss sphérique, de centre  $O$  et de rayon  $r$  ; l'expression du flux est inchangée, mais la charge localisée à l'intérieur de la surface de Gauss n'est plus la charge totale du noyau et a pour expression

$$Q_\Sigma = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

L'application du théorème de Gauss conduit alors à

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

et finalement

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r \text{ pour } r \leq R$$

## II Énergie électrostatique

1. En remarquant que  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$  est le potentiel créé par la charge ponctuelle  $Q$  à une distance  $R$ , on voit que  $\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$  a la dimension d'une énergie. On en déduit

$$\alpha = -1; \beta = 2; \gamma = -1$$

2. a) La densité volumique d'énergie liée au champ électrique est

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

b) L'énergie électrostatique totale est

$$\mathcal{E} = \iiint_{\text{espace}} u_e(M) d\tau$$

L'expression analytique de  $u_e$  change selon que le point  $M$  est à l'intérieur ou à l'extérieur du noyau :

$$u_e(r) = \begin{cases} \frac{\rho^2 r^2}{18\epsilon_0} & \text{pour } r < R \\ \frac{\rho^2 R^6}{18\epsilon_0 r^4} & \text{pour } r > R \end{cases}$$

on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \iiint_{\text{intérieur}} u_e(M) d\tau + \iiint_{\text{extérieur}} u_e(M) d\tau \\ &= 4\pi \int_0^R u_e(r) r^2 dr + 4\pi \int_R^\infty u_e(r) r^2 dr \\ &= \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr + \frac{2\pi\rho^2 R^6}{9\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\epsilon_0} + \frac{2\pi\rho^2 R^6}{9\epsilon_0} \frac{1}{R} \\ &= \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\epsilon_0} \left( \frac{1}{5} + 1 \right) \\ &= \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0} \end{aligned}$$

c) En exprimant la densité volumique de charge

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

on obtient

$$\mathcal{E} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

ce qui est de la forme

$$\mathcal{E} = K \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \text{ avec } K = \frac{3}{5}$$

3. a)  $V(M)$  étant le potentiel au point  $M$ , la transposition du modèle discret au modèle continu conduit à

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \iiint_{M \in \mathcal{D}} \rho(M) V(M) d\tau = \frac{\rho}{2} \iiint_{M \in \mathcal{D}} V(M) d\tau$$

b) Le potentiel ne dépend que de  $r$ ; pour  $r < R$ , le lien entre le potentiel et le champ électrique s'écrit

$$V'(r) = -\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

soit, en intégrant entre  $R$  et  $r$  :

$$V(r) = V(R) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right) = V(R) + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Le potentiel  $V(R)$  s'obtient en exploitant la continuité du potentiel en  $r = R$ ; la distribution étant localisée dans un domaine borné, on choisit l'origine des potentiels à l'infini. Le potentiel à l'extérieur est

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ donc } V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

soit finalement

$$V(r) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \text{ pour } r \leq R$$

c) On peut alors calculer l'intégrale triple conduisant à l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_p &= \frac{\rho}{2} \iiint_{M \in \mathcal{D}} V(M) d\tau \\
 &= \frac{3Q}{8\pi R^3} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \iiint_{M \in \mathcal{D}} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\
 &= \frac{3Q^2}{64\pi^2\epsilon_0 R^4} \int_0^R \left(3r^2 - \frac{r^4}{R^2}\right) dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 &= \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^4} \left[ r^3 - \frac{r^5}{5R^2} \right]_0^R \\
 &= \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^4} \frac{4}{5} R^3 \\
 &= \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}
 \end{aligned}$$

On retrouve l'énergie électrostatique obtenue précédemment par intégration de la densité volumique d'énergie.

### III Réaction de fission

1. Le volume d'un noyau contenant  $N$  nucléons est

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{N}{\mu} \text{ soit } R = \left(\frac{3N}{4\pi\mu}\right)^{1/3}$$

Numériquement, on obtient

élément	$N$	$R$
uranium	235	7,4 fm
baryum	141	6,2 fm
krypton	92	5,4 fm

2. L'énergie électrostatique libérée lors de la réaction de fission est

$$E_U - E_{Ba} - E_{Kr} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{N_U^2}{R_U} - \frac{N_{Kr}^2}{R_{Kr}} - \frac{N_{Ba}^2}{R_{Ba}} \right)$$

soit, numériquement

$$E_U - E_{Ba} - E_{Kr} = 5,5 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 344 \text{ MeV}$$

L'énergie libérée est du même ordre de grandeur, mais inférieure. Le bilan énergétique nécessite la prise en compte d'une interaction autre que l'interaction électrostatique (interaction nucléaire forte).

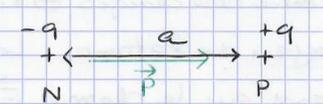
3. La fusion ne libère pas d'énergie électrostatique puisque la fusion consiste à rapprocher deux objets qui se repoussent électrostatiquement ; l'interaction électrostatique n'est donc pas prépondérante dans le bilan énergétique de la fusion.

## Deuxième partie

## Étude de la force de van der Wals

Extrait de Centrale PC 2020

Q1 | Un dipôle électrostatique est un doublet de charges (2 charges opposées) distantes de  $a$



$$\vec{p} = \text{moment dipolaire}$$

$$\vec{p} = q \vec{a}$$

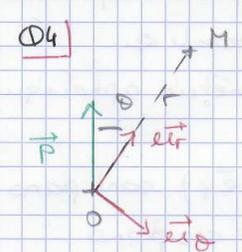
Q2 | Exemple : la molécule de chlorure d'hydrogène H-Cl.

$$\|\vec{p}\| \neq \text{exa avec } a \approx 10^{-10} \text{ m.}$$

$$\|\vec{p}\| \neq 10^{-29} \text{ Em}$$

Q3 | On peut considérer que  $\pi$  est à grande distance de 0 si  $n \gg a$ , avec  $n = \|\vec{OM}\|$

Q4 | On a  $V(\pi) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{OM}\|^3}$

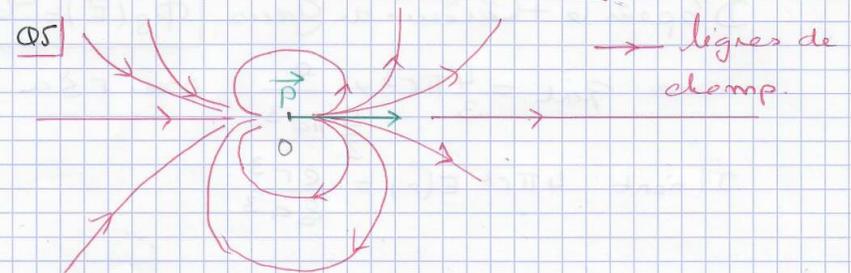


or  $\vec{E} = -\text{grad } V$

$$= -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = 0.$$

avec  $V(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

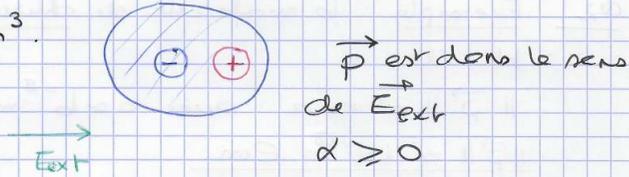
$$\vec{E} = + \frac{2p \cos \theta \vec{e}_r + p \sin \theta \vec{e}_\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



Polarisabilité d'un atome

Q6) Sous l'effet de champ électrique extérieur, le nuage électronique de l'atome se déforme. <sup>le noyau se déplace dans le sens opposé</sup> Par conséquent le barycentre des charges  $\ominus$  n'est plus confondu avec le noyau de l'atome. Le déplacement est d'autant plus grand que le champ  $\vec{E}_{ext}$  est intense.

$\alpha$  en  $m^3$ .



Q7) Modèle de Thomson.

Soit  $\vec{E}$  le champ créé par la sphère uniformément chargée de rayon  $a$  et de charge totale  $Q$ .

La distribution de charge est à symétrie sphérique

$$\|\vec{E}(M)\| = \|\vec{E}(r)\|$$

Les plans  $(\pi, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  et  $(\pi, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$  sont plans de symétrie pour la boule.  $\vec{E}$  est dans ces plans

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

Surface de Gauss = sphère de rayon  $r$   $S$

$$\Phi_S(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r)$$

D'après le théorème de Gauss  $\Phi_S(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$

avec  $q_{int} = \frac{4\pi r^3}{3} \times \frac{\rho}{4\pi a^3}$  pour  $r \leq a$

Il vient  $4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho r^3}{\epsilon_0 a^3}$

$$E(r) = \frac{\rho r}{4\pi \epsilon_0 a^3}$$

$$\vec{F}(M) = -\frac{e^2 r}{4\pi \epsilon_0 a^3} \vec{e}_r$$

Equivalent à une force de rappel élastique

Q8) L'électron est soumis à  $\vec{F}$  et  $\vec{F}_{ext} = -e \vec{E}_{ext}$

Position d'équilibre :  $\vec{F} + \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

$$-\frac{e^2 \vec{r}_0}{4\pi \epsilon_0 a^3} - e \vec{E}_{ext} = \vec{0}$$

$$\vec{r}_0 = -\frac{4\pi \epsilon_0 a^3}{e} \vec{E}_{ext}$$

Q9) Or  $\vec{r}_0 = \vec{PN} = -\vec{NP}$

On a donc  $\vec{p} = +e \vec{NP} = -e \vec{r}_0 = 4\pi \epsilon_0 a^3 \vec{E}_{ext}$

Par identification on en déduit  $\alpha = 4\pi a^3$

$$\alpha \approx 10^{-30} m^3$$

Interactions entre atomes

Q10) Une perturbation peut créer un dipôle instantané. Ce dipôle qui en champ  $\vec{E}$  qui crée un dipôle induit sur l'atome voisin, qui crée  $\vec{E}_{ind}$ ...

Q11) On a  $E_{pot} = -\vec{P}_2 \cdot \vec{E}_1$  énergie potentielle des dipôles  $\vec{P}_2$  de  $\vec{E}_1$  créé par  $\vec{P}_1$

or  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\text{grad}_{\vec{r}_{12}} E_{pot} = -\text{grad}(\vec{P}_2 \cdot \vec{E}_1(O_2))$

$$\text{avec } \vec{E}_1(O_2) = \frac{2P_1}{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2^3} \vec{e}_n.$$

$$\vec{F}_{1/2} = -\text{grad}(P_2 E_2(r))$$

$$\vec{F}_{1/2} = -P_2 \frac{dE_1}{dr} \vec{e}_n.$$

Q12) 
$$\vec{F}_{1/2} = + \frac{2P_1 P_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{-3}{r^4} \vec{e}_n$$

or  $P_2$  dipôle induit  $\propto E_1 = \frac{2P_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{-6P_1^2 \epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 r^7} \vec{e}_n.$$

$$= \frac{k}{r^7} \vec{e}_n \quad \text{avec } k < 0 \text{ force attractive.}$$

Q14. 
$$E_p = \frac{k}{7r^6}$$

### Troisième partie

## De la physique autour d'un tore

D'après Mines Ponts MP 2014

### III.1 Étude d'un conducteur ohmique torique

1. Dans un conducteur ohmique, on peut écrire

— l'équation de Maxwell-Gauss

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

— l'équation de conservation de la charge électrique

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

— la loi d'Ohm locale

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

En éliminant  $\vec{j}$  grâce à la loi d'Ohm locale dans l'équation de conservation de la charge électrique, on obtient

$$\gamma \text{div } \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

soit, compte tenu de l'équation de Maxwell-Gauss

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0$$

La densité volumique de charge  $\rho$  décroît donc exponentiellement avec une constante de temps

$$\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \simeq 10^{-19} \text{ s}$$

Après une perturbation, la densité volumique retourne à la valeur 0 en un temps de l'ordre de  $\tau$ ; si le temps caractéristique de variation des grandeurs électromagnétiques est très supérieur à  $\tau$ , le métal a le temps de se relaxer et la densité volumique de charge reste nulle.

2. En régime permanent, on a  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ , soit

$$\vec{E} = -\text{grad } V \text{ donc } \Delta V = \text{div}(\text{grad } V) = -\text{div } \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dans le conducteur ohmique la densité volumique de charge est nulle, et l'équation précédente (équation de Poisson) se réduit à une équation de Laplace :

$$\Delta V = 0$$

3. On suppose que  $V$  ne dépend que de l'angle  $\theta$ ; l'équation de Laplace devient alors

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$$

soit, en intégrant deux fois :

$$V(\theta) = A\theta + B$$

Les constantes d'intégration se déduisent des conditions aux limites

$$\begin{cases} U = B \\ 0 = A\alpha + B \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} A = -\frac{U}{\alpha} \\ B = U \end{cases}$$

ce qui donne finalement

$$V(\theta) = U \left( 1 - \frac{\theta}{\alpha} \right)$$

On en déduit le champ électrique

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(\theta) = \frac{U}{\alpha r} \vec{u}_\theta$$

et la densité de courant

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma U}{\alpha r} \vec{u}_\theta$$

4. L'intensité traversant une section rectangulaire droite quelconque du tore est égale au flux de  $\vec{j}$  à travers cette section, soit

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot \vec{u}_\theta dS \\ &= \iint_{\text{section}} \frac{\gamma U}{\alpha r} dr dz \\ &= \frac{\gamma U}{\alpha} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^c dz \\ &= \frac{\gamma U}{\alpha} c \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

On en déduit, grâce à la loi d'Ohm  $U = RI$ , sa résistance orthoradiale

$$R = \frac{\alpha}{\gamma c \ln \frac{b}{a}}$$

5. La résistance d'un conducteur filiforme de section  $S$  et de longueur  $L$  est

$$R_{fil} = \frac{L}{\gamma S}$$

Quand  $b$  est très proche de  $a$ , on peut effectuer l'approximation

$$\ln \frac{b}{a} = \ln \left( 1 + \frac{b-a}{a} \right) \simeq \frac{b-a}{a}$$

soit

$$R \simeq \frac{a\alpha}{\gamma c(b-a)}$$

Or la longueur des lignes de courant est  $L = a\alpha$ , tandis que la section est  $S = c(b-a)$ ; on obtient

$$R \simeq \frac{L}{\gamma S}$$

### III.2 Étude d'une pince ampèremétrique

6. Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie pour les courants; c'est donc un plan d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ . On en déduit que  $\vec{B}(M)$  est normal à ce plan; il est donc colinéaire à  $\vec{u}_\theta$ .

Il résulte de l'invariance par rotation autour de  $(O, z)$  que  $\vec{B} = B(r, z) \vec{u}_\theta$ . Appliquons le théorème d'Ampère à un cercle  $\mathcal{C}$  d'axe  $(O, z)$  et de rayon  $r$  à l'intérieur du tore; on obtient

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\mathcal{C}}$$

avec

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r, z)$$

et

$$I_{\mathcal{C}} = Ni_1 + i$$

On en déduit que

$$B(r, z) = \frac{\mu_0(Ni_1 + i)}{2\pi r}$$

Le champ magnétique est bien la forme

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta \text{ avec } B(r) = \frac{\mu_0(Ni_1 + i)}{2\pi r}$$

7. Le flux  $\Phi$  de  $\vec{B}$  à travers le bobinage est  $\Phi = N\varphi$ , où  $\varphi$  est le flux à travers une spire.

$$\begin{aligned}\varphi &= \iint_{\text{section}} \vec{B} \cdot \vec{u}_\theta dS \\ &= \frac{\mu_0(Ni_1 + i)}{2\pi} \int_0^c dz \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 c \ln \frac{b}{a} (Ni_1 + i)}{2\pi}\end{aligned}$$

On en déduit

$$\Phi = \frac{\mu_0 c \ln \frac{b}{a} N(Ni_1 + i)}{2\pi}$$

En identifiant cette expression à

$$\Phi = Li_1 + Mi$$

on obtient

$$\begin{cases} L = \frac{\mu_0 N^2 c \ln \frac{b}{a}}{2\pi} \\ M = \frac{\mu_0 N c \ln \frac{b}{a}}{2\pi} \end{cases}$$

## Quatrième partie

# Conductivité dans un semi-conducteur

Extrait de CCINP 2000

1. (a) Un électron est soumis à son poids (négligeable), à la force de frottement  $\vec{f}$  et à la force électrique  $-e\vec{E}$ . D'après le principe fondamental de la dynamique, on a

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \vec{v} - e\vec{E}$$

En champ nul, la vitesse de l'électron est régie par l'équation différentielle

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \vec{v},$$

qui peut se réécrire

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = \vec{0},$$

où  $\tau = m/\alpha$  est le temps caractéristique d'évolution de la vitesse de dérive des électrons. Au delà de quelques  $\tau$ , la vitesse est pratiquement nulle.

- (b) En régime stationnaire, et en présence d'un champ électrique  $\vec{E}$ , la vitesse est

$$\vec{v} = -\frac{e}{\alpha} \vec{E};$$

la densité volumique de courant est alors

$$\vec{J} = -ne \vec{v} = \frac{ne^2}{\alpha} \vec{E}$$

ce qui vérifie bien la loi d'Ohm, avec une conductivité électronique

$$\gamma = \frac{ne^2}{\alpha} = \frac{ne^2 \tau}{m}.$$

- (c)  $\tau = \frac{\gamma m}{ne^2} = 2.10^{-16}$  s.  
 (d) La nappe de courant étant localisée entre les plans  $z = -a/2$  et  $z = +a/2$ , il y a invariance par translation dans les directions de  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ . Le champ  $\vec{b}$  en un point  $M$  est donc de la forme  $\vec{b}(M) = \vec{b}(z)$ .

Le plan  $(M\vec{e}_x, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie pour les courants; c'est donc un plan d'antisymétrie pour  $\vec{b}$ .  $\vec{b}(M)$  est donc normal à ce plan, c'est-à-dire colinéaire à  $\vec{e}_y$ . Il en résulte que  $\vec{b}(M) = b(z)\vec{e}_y$ .

Enfin, le plan  $z = 0$  est un plan de symétrie pour les courants, donc plan d'antisymétrie pour  $\vec{b}$ . Il en résulte que la fonction  $z \rightarrow b(z)$  est impaire. En particulier, on a  $b(0) = 0$ .

On peut utiliser l'équation de Maxwell-Ampère pour déterminer  $\vec{b}$ ;

$$\text{rot } \vec{b} = \text{rot } (b(z)\vec{e}_y) = -b'(z)\vec{e}_x.$$

Pour  $|z| < a/2$ , on a  $-b'(z)\vec{e}_x = \mu_0 J$  soit, en intégrant entre  $O$  et  $z$  :

$$\vec{b} = -\mu_0 J z \vec{e}_y.$$

Pour  $z > a/2$ , on a  $-b'(z)\vec{e}_x = 0$  soit, en intégrant entre  $a/2$  et  $z$  :

$$\vec{b} = -\mu_0 J \frac{a}{2} \vec{e}_y.$$

Pour  $z < -a/2$ , on a  $-b'(z)\vec{e}_x = 0$  soit, en intégrant entre  $-a/2$  et  $z$  :

$$\vec{b} = \mu_0 J \frac{a}{2} \vec{e}_y.$$

Numériquement, on obtient

$$b_{max} = \mu_0 J \frac{a}{2} = 6, 3 \cdot 10^{-6} \text{ T.}$$

2. (a) L'échantillon est désormais plongé dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ . L'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $\vec{v}$  d'un électron devient alors, en l'absence de champ électrique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \vec{v} - e (\vec{v} \wedge \vec{B}).$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \vec{v} - \frac{e}{m} (\vec{v} \wedge \vec{B}).$$

- (b) En présence d'un champ électrique  $\vec{E}$ , parallèle au plan  $Oxy$ , et du champ  $\vec{B}$  appliqué précédent, l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $\vec{v}$  d'un électron devient alors

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \vec{v} - \frac{e}{m} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

En régime stationnaire, on obtient

$$-\vec{v} - \frac{e\tau}{m} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0},$$

soit

$$\vec{E} = -\frac{m}{e\tau} \vec{v} - \vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{m}{ne^2\tau} \vec{J} + \frac{1}{ne} \vec{J} \wedge \vec{B};$$

en reconnaissant la conductivité et en exprimant  $\vec{J}$  sur la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{\gamma} (J_x \vec{e}_x + J_y \vec{e}_y) + \frac{B}{ne} (J_x \vec{e}_x + J_y \vec{e}_y) \wedge \vec{e}_z \\ &= \left( \frac{J_x}{\gamma} + \frac{BJ_y}{ne} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{J_y}{\gamma} - \frac{BJ_x}{ne} \right) \vec{e}_y \end{aligned}$$

ce qui se met sous la forme

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix}$$

avec

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = 1/\gamma \text{ et } \rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{ne}.$$

- (c) Pour un échantillon de grande dimension selon  $\vec{e}_y$ , on peut supposer le barreau pratiquement infini selon  $\vec{e}_y$ , ce qui autorise une composante selon  $\vec{e}_y$  de la densité de courant. Avec  $\vec{E} = E\vec{e}_x$ , on a

$$\begin{cases} E = \frac{J_x}{\gamma} + \frac{qBJ_y}{ne} \\ 0 = \frac{J_y}{\gamma} - \frac{qBJ_x}{ne} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} J_x = \frac{\gamma}{1 + \left(\frac{\gamma B}{ne}\right)^2} E \\ J_y = \frac{\gamma B}{ne} \frac{\gamma}{1 + \left(\frac{\gamma B}{ne}\right)^2} \end{cases}$$

Les lignes de courant sont rectilignes, inclinées d'un angle

$$\alpha = \arctan \left( \frac{\gamma B}{ne} \right)$$

par rapport à l'axe  $Ox$ . En l'absence de champ magnétique, la résistance de l'échantillon est

$$R_0 = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{al};$$

en présence de champ magnétique, cette résistance est augmentée (phénomène de magnétorésistance) et vaut

$$R = \frac{1}{\gamma} \left( 1 + \left( \frac{\gamma B}{ne} \right)^2 \right) \frac{L}{al} = R_0 \left( 1 + \left( \frac{\gamma B}{ne} \right)^2 \right);$$

La modification relative de résistance est

$$\frac{R - R_0}{R_0} = \left( \frac{\gamma B}{ne} \right)^2$$

soit, numériquement

$$\frac{R - R_0}{R_0} = 4 \cdot 10^{-7}.$$

(d) La densité de courant étant  $\vec{J} = J\vec{e}_x$ , le champ électrique est

$$\begin{cases} E_x = \frac{J}{\gamma} \\ E_y = -\frac{BJ}{ne} \end{cases}$$

Il apparaît donc un champ électrique transversal  $E_y = -\frac{BJ}{ne}$  et une différence de potentiel

$$V_H = V(\ell) - V(0) = -\ell E_y = \frac{BJ\ell}{ne} = \frac{BI}{nea}.$$

Numériquement, on obtient

$$V_H = 6.10^{-4} \text{ V.}$$

Ce dispositif, pour un semi-conducteur connu, permet d'effectuer des mesures de champ magnétique (sonde de Hall).

A l'inverse, si l'on soumet un semi-conducteur inconnu à un champ magnétique connu, on peut déterminer le signe de la charge des porteurs et le nombre de porteurs par unité de volume.

(e) La résistance transverse est

$$R_t = V_H/I = \frac{B}{nea} = \frac{ah}{peB} \frac{B}{nea} = \frac{h}{pe^2},$$

ce qui se met sous la forme :

$$R_t = R_K/p, \text{ avec } R_K = \frac{h}{e^2}$$

La constante de Klitzing  $R_K$  peut être utilisée comme étalon car elle ne dépend que de constantes fondamentales.