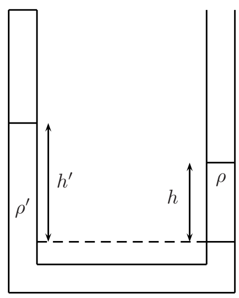
# Statique des fluides

## Question de cours

- Donner une définition de la pression. Quelle est l'unité de pression ?
- Donner l'équivalent volumique de la résultante des forces de pression s'exerçant sur une particule fluide de volume $d\tau$.
- Énoncer le principe fondamental de la statique des fluides.
- Dans la cas d'un fluide soumis uniquement au champ de pesanteur $\vec{g}$ dans un référentiel galiléen, comment s'exprime le principe fondamental de la statique des fluides ?
- Quelles sont les hypothèses liées à la loi fondamentale de l'hydrostatique ?
- Dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, donner l'expression de la loi fondamentale de l'hydrostatique.
- Quelles sont les hypothèses du modèle de l'atmosphère isotherme ?
- Établir l'expression de $P(z)$ dans le cas de l'atmosphère isotherme.
- Énoncer le théorème d'Archimède.
- Donner l'expression de la poussée d'Archimède subie par un corps de volume $V$, de masse volumique $\mu$ au repos dans un fluide de masse volumique $\mu_f$ dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$.
- Donner l'expression de la densité volumique de forces de pesanteur d'un fluide de masse volumique $\mu$.
- Donner l'expression de la densité volumique de forces d'inertie d'entrainement.

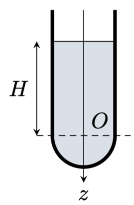
## Exercices

### 1. Tube en U




Soit un tube en $U$ fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles, de masse volumique $\rho$ et $\rho'$. La branche fermée emprisonne un gaz à la pression $P'$, la pression du gaz au dessus de la surface libre est $P$. Quelle relation lie $P$, $P'$, $\rho$, $\rho'$, $h$ et $h'$ ?

### 2. Force de pression sur un tube à essai




On considère un tube à essais rempli d'un liquide incompressible de masse volumique $\rho$. On raisonne sur un axe vertical $z$ descendant dont l'origine se trouve comme indiqué sur le schéma ci-contre.

1. Déterminer l'expression de la pression $P(z)$.
2. Justifier que la résultante des forces pressantes sur la partie cylindrique du tube est nulle.
3. Déterminer la direction de la résultante des forces de pression subies par la portion hémisphérique du tube.
4. Faire le calcul. Commenter.

### 3. Tunnel de l'aquarium Nausicaa

L'aquarium Nausicaa de Boulogne-sur-Mer est le plus grand d'Europe. Parmi les divers espaces dans lesquels il propose à ses visiteurs d'observer les animaux marins figure un tunnel sous-marin long de 18 m. Ce tunnel peut être approximé par un demi-cylindre de rayon $a = 3$ m et de longueur $L = 18$ m se trouvant au fond d'un bassin profond de $H = 8$ m. On cherche à estimer la résultante des forces pressantes subies par les vitres constituant le tunnel.

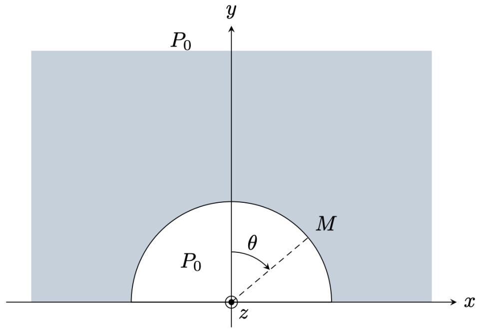



**Figure 2 – Tunnel de l'aquarium Nausicaa.**

1. Exprimer le champ de pression $P(y)$ dans l'eau de l'aquarium.
2. Montrer sans calcul que la résultante des forces pressantes subies par le tunnel est dirigée selon $\overrightarrow{e_y}$.
3. Montrer que la composante $\mathrm{dF_{p,y}}$ de la force pressante subie par l'élément de surface dS centré sur le point $M$ s'écrit :
$$\mathrm{dF_{p,y}} = \left(\frac{1}{2}\rho \mathrm{ga}^2 - \rho \mathrm{gHa}\cos\theta + \frac{1}{2}\rho \mathrm{ga}^2\cos(2\theta)\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{dz}.$$
4. En déduire la résultante des forces pressantes. Calculer sa valeur numérique.

## 4. Océan isotherme

On considère un océan en équilibre isotherme. La masse volumique de l'eau varie avec la pression selon la loi :

$$\rho = \rho_0(1 + a(P - P_0))$$

où $a = 10^{-10}\ Pa^{-1}$.

1. Établir la loi $P(z)$.
2. Que devient cette loi pour des profondeurs faibles ?
3. Application numérique : calculer $P_{\text{exact}}$ et $P_{\text{approchée}}$ pour $z = 1$ km. Quelle est l'erreur relative commise en utilisant la loi approchée ?

## 5. Modèle de la troposphère.

Des mesures météorologiques dans l'atmosphère permettent de montrer que la température y évolue de manière affine par morceaux. Ces variations étant très stables et reproductibles, elles ont été compilées dans un modèle appelé « International Standard Atmosphere » qui sert de base aux météorologues. L'origine se trouvant à la surface de la Terre, ce modèle prend comme références

$$T(z=0) = T_0 = 15^{\circ}\text{C} \quad \text{et} \quad P(z=0) = P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

et donne la valeur du gradient thermique à toute altitude. On s'intéresse ici aux 11 premiers kilomètres de l'atmosphère (troposphère), où

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dz}} = -k = -6,5 \text{ K.km}^{-1}$$

1. Déterminer la température en fonction de l'altitude dans la troposphère.
2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la pression atmosphérique P(z).
3. Déterminer l'expression du champ de pesanteur.

## 6. Atmosphère adiabatique

On étudie la répartition de température et de pression en altitude de l'air sec dans l'atmosphère en équilibre adiabatique (absence d'échange de chaleur entre masses d'air voisines ; on a $PV^\gamma$ =cte). On suppose que l'air est un gaz parfait de masse molaire $M = 29$ g.mol$^{-1}$, de coefficient $\gamma = 1,4$. À la surface au sol : $T_0 = 293$ K et $P_0 = 10^5$ Pa. On prendra $R = 8,30$ J.mol$^{-1}$ et $g = 10$ m.s$^{-2}$.

1. Établir l'expression de la température $T$ en fonction de l'altitude $z$ est des constantes $T_0$, $g$, $M$, $R$, $\gamma$. On introduira la constante $\beta = Mg/RT_0$.
2. Établir l'expression de la pression $P$ en fonction de $z$ et de $\beta$, $\gamma$, $P_0$.
3. Application numérique : calculer les valeurs du gradient de température $dT/dz$, de la température $T_1$ à la pression $P_1$ à l'altitude $z_1 = 2300$ m.

## 7. Camion-citerne

Soit un récipient parallélépipédique rectangle de longueur $L$ contenant initialement une hauteur $h$ d'eau incompressible, de masse volumique $\mu$ à l'équilibre. On impose au récipient une accélération uniforme $\overrightarrow{a_0}$ (par exemple en se plaçant dans un véhicule), horizontale et parallèle à son côté de longueur $L$. On constate expérimentalement qu'après quelques oscillations, l'eau s'immobilise par rapport au récipient : elle est alors en équilibre dans le référentiel (non galiléen) lié au récipient.

1. En écrivant la relation de la statique des fluides dans le référentiel lié au récipient, établir trois équations aux dérivées partielles vérifiées par le champ de pression.
2. En déduire l'expression du champ de pression $P(x, y, z)$. On pourra faire intervenir l'altitude $z_0$ inconnue du point de la surface libre situé en $x = 0$.
3. Déterminer l'équation de la surface libre (interface eau-air).
4. Déterminer $z_0$.
5. À l'aide d'un fil sans masse de longueur $d$, on attache une petite balle en polystyrène de volume $V_1$ et de masse volumique $\mu_1 < \mu$ au fond du récipient en un point $A$. Le fil est suffisamment court pour que la balle reste complètement immergée. Déterminer l'angle $\beta$ que fait le fil avec l'axe $Oz$ ainsi que la norme $\|\overrightarrow{T}\|$ de sa tension à l'équilibre.

## 8. Récipient en rotation

Soit un récipient cylindrique de rayon $R$ contenant initialement une hauteur $h$ d'eau à l'équilibre. Grâce à un moteur, ce récipient est mis en rotation à vitesse angulaire constante autour de son axe de révolution. On constate expérimentalement que l'eau est progressivement entraînée en rotation avec le récipient jusqu'à s'immobiliser par rapport au récipient. L'eau est donc en équilibre dans le référentiel tournant (non galiléen) lié au récipient. On travaille en coordonnées cylindriques $(O, r, \theta, z)$ dont l'axe $(O, \overrightarrow{u_z})$ constitue l'axe de rotation, le point $O$ étant au fond du récipient.

1. Exprimer la force d'inertie d'entraînement. La mettre sous forme d'un gradient.
2. Effectuer un bilan des forces dans le référentiel tournant pour obtenir une relation dans le fluide reliant notamment $p$, $z$ et $r$.
3. En déduire que la surface libre est de la forme $z(r) = \beta r^2 + \alpha$ où $\beta$ est à exprimer et $\alpha$ est pour l'instant inconnue.
4. En découpant le volume de fluide en couronnes cylindriques d'épaisseur $dr$, on montre que $V = \int_0^R z(r).2\pi r.dr$. Par conservation du volume lors de la mise en rotation, en déduire la constante $\alpha$.
5. Déterminer les hauteurs minimale et maximale atteintes par le fluide dans le récipient. Quelle est la condition sur la vitesse angulaire $\omega$ pour que le fond du récipient ne se découvre pas