

Actions de contact

I Contraintes dans un fluide

I.1 Actions à distance

Ces actions sont réparties en volume. Elles peuvent être décrites par une densité volumique de force.

Exemples :

- Le poids de densité volumique $\vec{f}_{\text{poids}} = \mu \vec{g}$,
- La force d'inertie d'entraînement en référentiel non galiléen : $\vec{f}_{ie} = -\mu \vec{a}_{ent}$,
- La force d'inertie de Coriolis en référentiel non galiléen : $\vec{f}_{iC} = -2\mu \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$.

I.2 Actions surfaciques

Un volume \mathcal{V} de fluide délimité par une surface fermée Σ ressent des forces de surface de la part de son environnement. Sur l'élément infinitésimal $d\Sigma$ s'exerce une force de contact $d\vec{F}$ qui a une composante normale, liée à la pression P , et une composante tangentielle, la force de viscosité.

I.3 Forces de pression

La résultante des forces de pression exercées sur un volume \mathcal{V} de fluide délimité par une surface fermée Σ est

$$\oint_{M \in \Sigma} -P(M) \vec{dS}_{M,ext} = \iiint_{M \in \mathcal{V}} -\overrightarrow{\text{grad}}(P(M)) d\tau_M$$

On peut définir un équivalent volumique des forces de pression :

$$\vec{f}_P = -\overrightarrow{\text{grad}} P$$

I.4 Force de viscosité

On s'intéresse à l'écoulement de cisaillement d'un fluide newtonien. Le champ des vitesses est de la forme $\vec{v}(M, t) = v(y, t) \vec{u}_x$.

Entre deux couches de fluide il existe des contraintes tangentielles à l'écoulement qui accélèrent la couche la plus lente et ralentissent la couche la plus rapide. On peut les décrire par une force de viscosité $d\vec{F}_{visc}$ exercée par le fluide au dessus de y_0 sur la surface dS du système fluide en dessous de y_0 :

$$d\vec{F}_{visc} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \vec{u}_x$$

η est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

η s'exprime en poiseuille (Pℓ). La viscosité dynamique dépend de la température.

Ordres de grandeur :

| Fluide | air | eau | huile | glycérine | miel |
|--------------|---------------------|---------------------|-------|-----------|--------|
| η en Pℓ | $1,5 \cdot 10^{-5}$ | $1,0 \cdot 10^{-3}$ | 0,1 | 1,5 | 2 - 10 |

L'équivalent volumique des forces de viscosité pour un fluide newtonien en écoulement incompressible est :

$$\overrightarrow{dF}_{visc} = \overrightarrow{f}_{visc} d\tau \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{f}_{visc} = \eta \Delta \overrightarrow{v}$$

II Nombre de Reynolds

II.1 Équation de Navier-Stokes

Équation de Navier Stokes dans le cas d'un référentiel galiléen : en écrivant le théorème de la résultante cinétique appliqué à une particule fluide de volume $d\tau$, on trouve :

$$\mu \frac{D \overrightarrow{v}}{Dt} = \overrightarrow{f}_V - \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \overrightarrow{v}$$

ou en divisant par μ et en définissant la viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\mu}$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{f}_V}{\mu} - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \nu \Delta \overrightarrow{v}$$

On reconnaît :

- $\mu \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}$: le terme d'inertie dit instationnaire dû à la variation temporelle du champ des vitesses (accélération locale);
- $\mu(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \overrightarrow{v}$: le terme d'inertie de convection dû au transport de quantité de mouvement par l'écoulement (terme qui confère à l'équation de Navier-Stokes un caractère non linéaire);
- $-\overrightarrow{\text{grad}}(P)$: le terme dû au champ de pression;
- $\eta \Delta \overrightarrow{v}$: le terme dû à la viscosité, rendant compte de la diffusion de la quantité de mouvement.

II.2 Le nombre de Reynolds

On appelle nombre de Reynolds le rapport (sans dimension) :

$$Re = \frac{LV}{\nu} = \frac{\mu LV}{\eta}$$

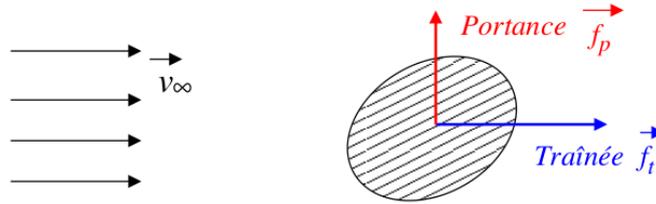
où V est l'ordre de grandeur du champ de vitesse, L la distance caractéristique de variation de celui-ci; ν est la viscosité cinématique, μ la masse volumique et η la viscosité dynamique.

Il correspond, en ordre de grandeur, au rapport entre le terme convectif et le terme diffusif dans l'équation de Navier-Stokes :

$$Re \simeq \frac{\|(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \overrightarrow{v}\|}{\|\eta \Delta \overrightarrow{v}\|}$$

III Écoulement autour d'une sphère

On envisage un objet (une sphère) en mouvement à la vitesse \vec{v}_{objet} dans un fluide au repos. Cela est équivalent à considérer l'écoulement, autour d'un objet immobile, d'un fluide animé de la vitesse uniforme $\vec{v}_{\infty} = -\vec{v}_{\text{objet}}$ à l'infini.



Dans le cas général, l'écoulement exerce sur l'obstacle une action que l'on décompose en deux composantes :

- La traînée \vec{f}_t parallèle à \vec{v}_{∞} ,
- La portance \vec{f}_p perpendiculaire à \vec{v}_{∞} .

Ces forces sont associées aux actions de contact (forces de pression et forces de cisaillement) exercées par le fluide sur l'objet.

III.1 Force de traînée

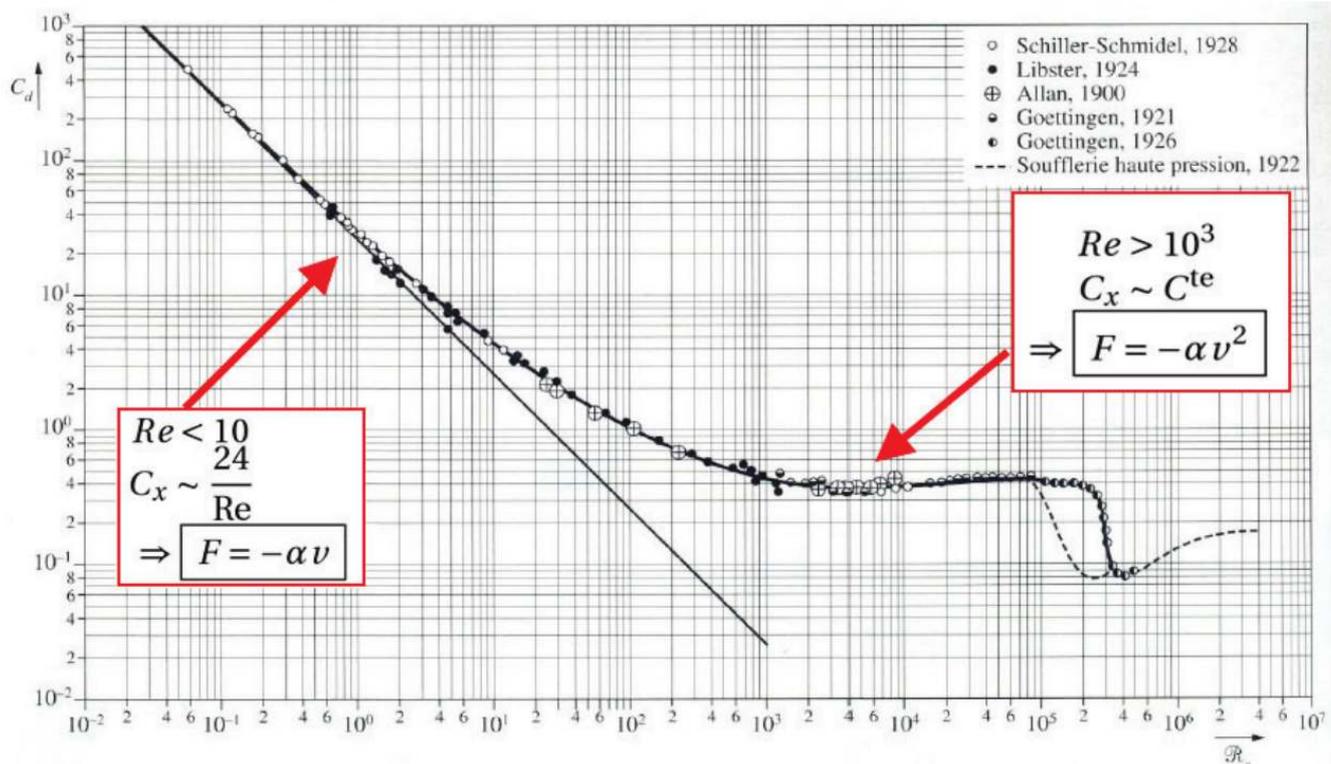
On considère l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible autour d'une sphère.

On définit C_x , nombre sans dimension, appelé **coefficient de traînée**, par :

$$C_x = \frac{f_t}{\frac{1}{2}\mu S v_{\infty}^2}$$

avec S la surface projetée de l'obstacle ($S = \pi R^2$).

On constate expérimentalement que l'évolution du coefficient de traînée d'une sphère en mouvement dans un fluide a une allure indépendante du fluide.



On distingue sur la courbe deux domaines pour lesquels la modélisation est simple :

- le domaine des faibles vitesses (domaine de Stokes) pour lequel la courbe peut être assimilée à une droite de pente -1 en échelles logarithmiques.
- un domaine de vitesses intermédiaires pour lequel la courbe présente un large palier couvrant plusieurs puissances de 10.

a Cas des faibles vitesses

À faible nombre de Reynolds, $C_x = \frac{24}{Re} = \frac{24\eta}{\mu L v_\infty}$, avec $S = \pi R^2$ et $L = 2R$, on en déduit, pour la force de traînée :

$$f_t = \frac{1}{2} \mu \pi R^2 v_\infty^2 \frac{24\eta}{\mu L v_\infty} = 6\pi\eta v_\infty$$

À faible nombre de Reynolds $Re < 1$, la force de traînée vérifie la formule de Stokes :

$$\vec{f}_t = -6\pi\eta R \vec{v}_{objet}$$

La formule de Stokes ne fait pas apparaître la masse volumique et est proportionnelle à la vitesse de l'écoulement ; les effets de viscosité (η) l'emportent sur les effets inertiels (μ). Le fluide n'est pas arrêté par l'obstacle mais glisse autour de celui-ci, la force de traînée est associée au frottement du fluide sur la sphère.

b Cas des vitesses élevées

Pour $10^3 < Re < 10^5$, C_x est à peu près constant : $C_x \simeq \frac{1}{2}$.

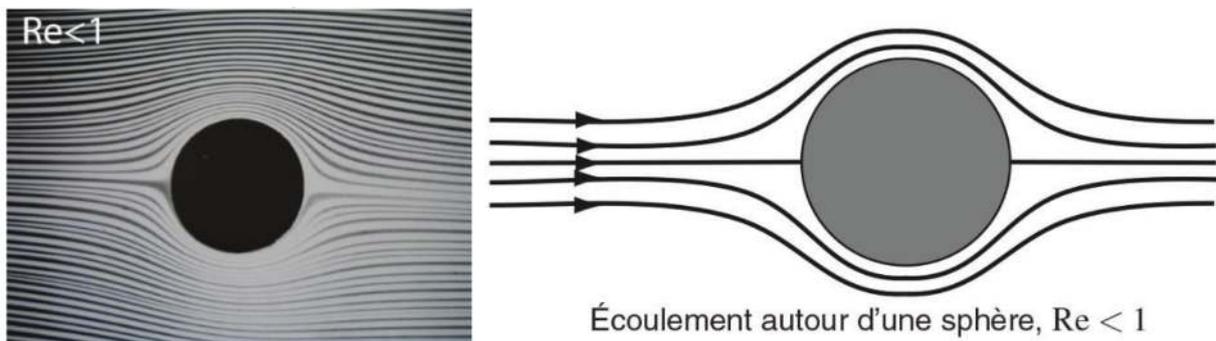
On en déduit, pour la force de traînée :

$$f_t \simeq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \mu \pi R^2 v_\infty^2$$

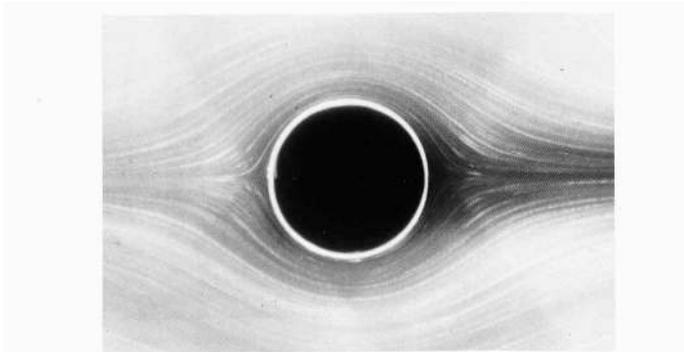
La force de traînée est proportionnelle au carré de la vitesse. Les effets inertiels l'emportent sur l'effet de la viscosité (η n'apparaît pas dans l'expression de f_t).

III.2 Allure des écoulements

a $Re < 1$

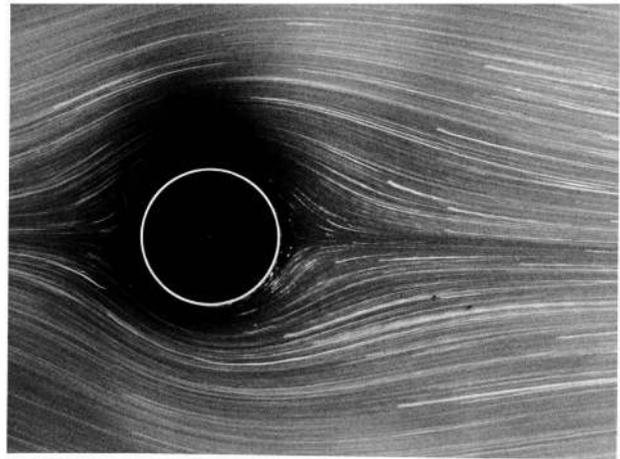


Les lignes de courant sont régulières et indépendantes du temps. On dit que l'écoulement est **laminaire**. Pour $Re < 1$, l'écoulement est stationnaire et symétrique entre l'amont et l'aval de l'obstacle.



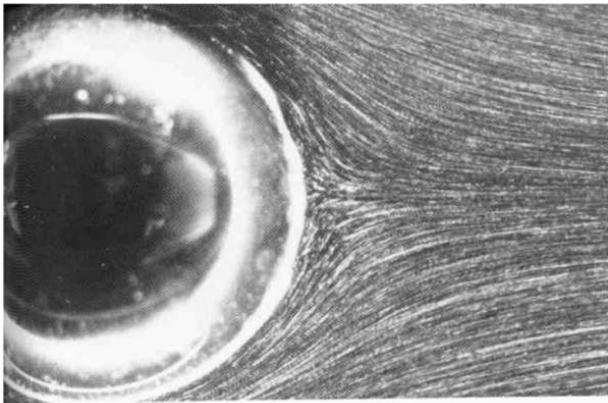
6. Uniform flow past a circular cylinder at $R=0.16$. That the flow is from left to right can scarcely be deduced from the streamline pattern, because in the limit of zero Reynolds number the flow past a solid body is reversible, and hence symmetric about a symmetric shape. It resembles

superficially the pattern of potential flow in figure 1, but the disturbances to the uniform stream die off much more slowly. The flow of water is shown by aluminum dust. Photograph by Sadatoshi Taneda

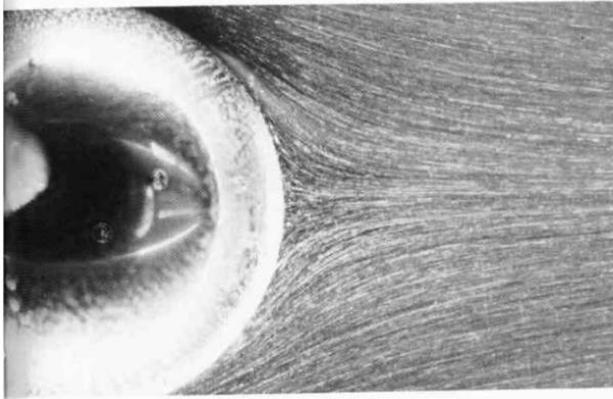


24. Circular cylinder at $R=1.54$. At this Reynolds number the streamline pattern has clearly lost the fore-and-aft symmetry of figure 6. However, the flow has not yet separated at the rear. That begins at about $R=5$,

though the value is not known accurately. Streamlines are made visible by aluminum powder in water. Photograph by Sadatoshi Taneda



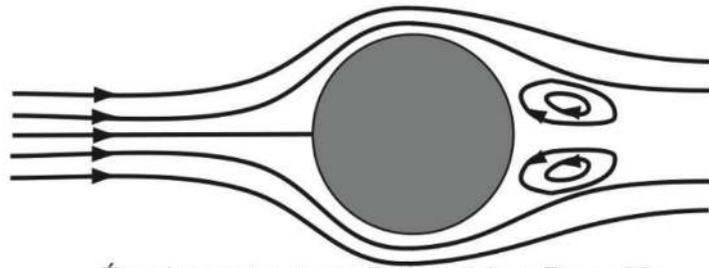
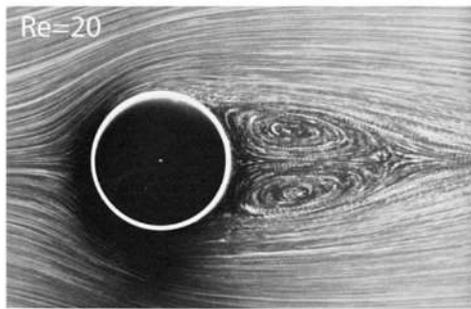
26. Flow behind a sphere at $R=8.15$. A steel ball bearing supported laterally on a fine piano wire is towed through water containing suspended aluminum dust, and illuminated by a sheet of light in the equatorial plane. The flow is clearly not yet separated. Photograph by Sadatoshi Taneda



27. Flow behind a sphere at $R=17.9$. As the speed increases it is difficult to discern the onset of separation at the rearmost point. Here the flow must still be attached, because these experiments have indicated that separation behind an isolated sphere begins at about $R=24$. Taneda 1956b

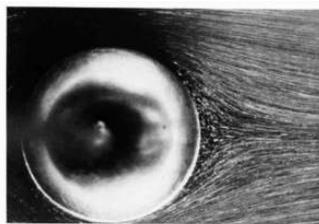
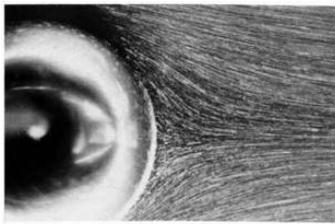
Lorsque le nombre de Reynolds croît, l'écoulement reste laminaire mais perd son aspect symétrique entre l'amont et l'aval.

b Nombres de Reynolds intermédiaires



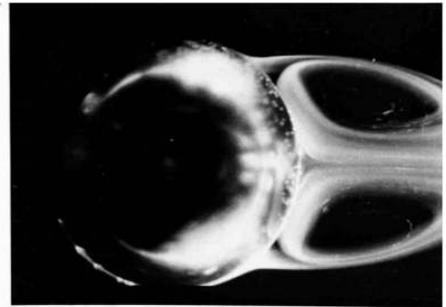
Écoulement autour d'une sphère, $Re \approx 20$.

Pour des nombres de Reynolds plus grands ($Re > 30$), il apparaît des paires de tourbillons dans le sillage de part et d'autre du plan de symétrie de l'écoulement. La dimension des tourbillons augmente avec le nombre de Reynolds.

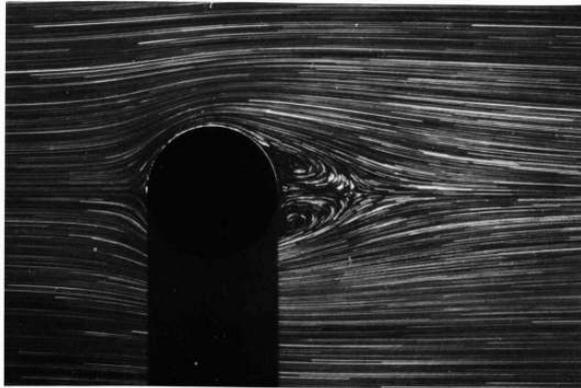


49. Sphere at $R=25.5$. Although it is not obvious, the flow is believed just to have separated at the rear at this Reynolds number, in contrast to the unseparated flow of figure 27. Aluminum dust is illuminated in water. Tanieda 1956b

50. Sphere at $R=26.8$. At this slightly higher speed the flow has clearly separated over the rear of the sphere, to form a thin standing vortex ring. Aluminum dust is illuminated in water. Tanieda 1956b

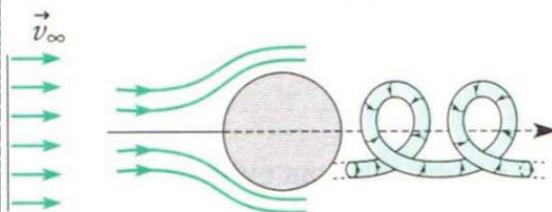
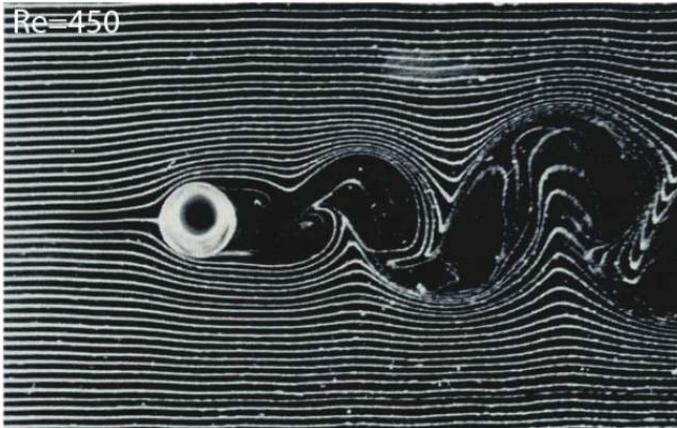


52. Sphere at $R=104$. At this Reynolds number the recirculating wake extends a full diameter downstream, but is perfectly steady, as for the circle in figure 44. Visualization is by a thin coating of condensed milk on the sphere, which gradually melts and is carried into the stream of water. Tanieda 1956b



51. Sphere at $R=56.5$. As in figure 8, the sphere is falling steadily down the axis of a tube filled with oil, but here so large that the influence of the walls is negligible. Magnesium cuttings are illuminated by a sheet of light, which casts the shadow of the sphere. Archives de l'Académie des Sciences de Paris. Payard & Cousteau 1974

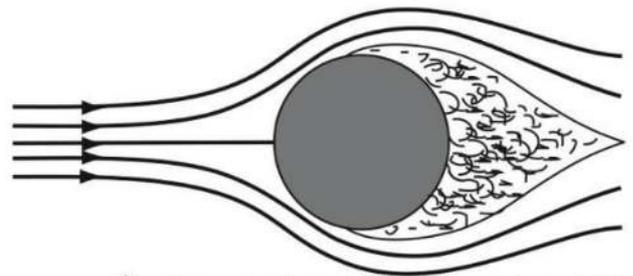
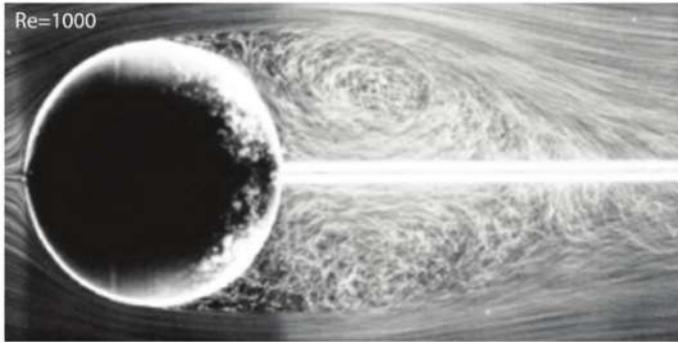
53. Sphere at $R=118$. The wake grows more slowly in axisymmetric than plane flow. These photographs have shown that the length of the recirculating region is proportional to the logarithm of the Reynolds number, whereas it grows linearly with Reynolds number for a cylinder. Aluminum dust shows the flow of water. Tanieda 1956b



$Re \approx 450$

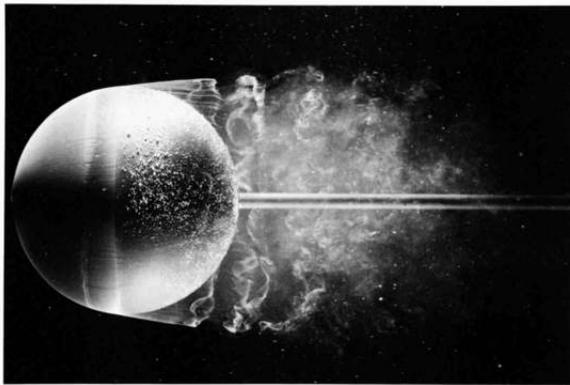
Le tourbillon torique précédent se détache en prenant une forme hélicoïdale.

c Nombres de Reynolds entre 10^3 et 10^5

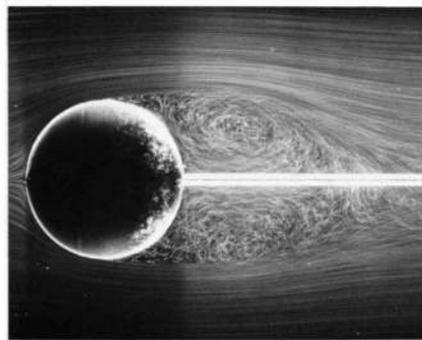


Écoulement autour d'une sphère, $Re \approx 1000$.

L'écoulement n'est plus stationnaire, il se forme un sillage turbulent derrière l'obstacle.



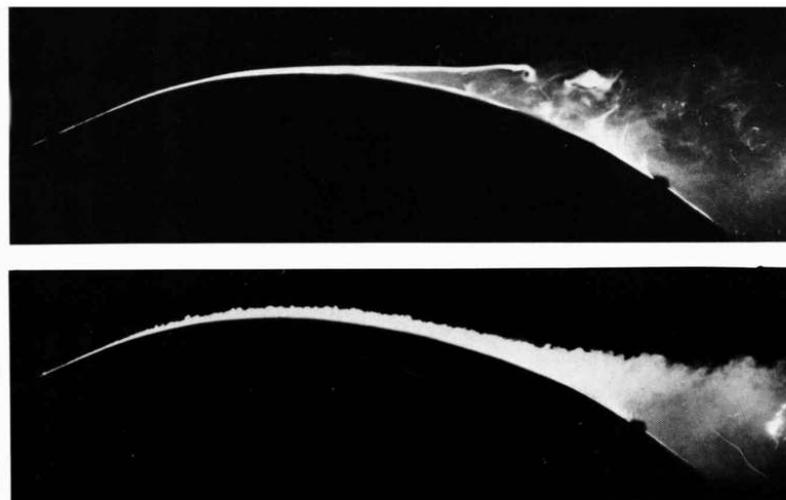
55. Instantaneous flow past a sphere at $R=15,000$. Dye in water shows a laminar boundary layer separating ahead of the equator and remaining laminar for almost one radius. It then becomes unstable and quickly turns turbulent. ONERA photograph, Werlé 1980



56. Mean flow past a sphere at $R=15,000$. A time exposure of air bubbles in water shows an averaged streamline pattern in the meridian plane for the flow that was photographed instantaneously above. ONERA photograph by Henri Werlé

d Crise de la traînée

Dans le cas d'une sphère lisse, pour $Re > 3 \cdot 10^5$, on observe une chute brutale du coefficient de traînée. La couche limite laminaire devient une couche limite turbulente qui tient mieux à l'obstacle réduisant d'autant le sillage et le C_x .



156. Comparison of laminar and turbulent boundary layers. The laminar boundary layer in the upper photograph separates from the crest of a convex surface (cf. figure 38), whereas the turbulent layer in the second

photograph remains attached; similar behavior is shown below for a sharp corner. (Cf. figures 55-58 for a sphere.) Titanium tetrachloride is painted on the forepart of the model in a wind tunnel. Head 1982

Les clichés d'écoulements autour des sphères sont extraits de "An Album of Fluid Motion".