Bilans macroscopiques

Applications directes du cours

$\boxed{1}$ Un liquide incompressible homogène de masse volumique ρ_0 s'écoule de façon uniforme dans une canalisation de section droite S avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$. Donner l'expression du débit massique dans la canalisation.

$\boxed{2}$ Une couche de miel d'épaisseur e et de largeur a, de masse volumique homogène μ_0 s'écoule horizontalement avec un profil des vitesses de la forme $\overrightarrow{v} = v_0\frac{z}{e}\overrightarrow{u_x}$. Calculer le débit massique à travers le section de hauteur e et de largeur a.

$\boxed{1}$ $D_m = \rho_0 v_0 S$; $\boxed{2}$ $Dm = \frac{1}{2}\rho_0 v_0 ae$.

Exercices

1. Tirage d'une cheminée

Une cheminée conique de hauteur H a un rayon de $2R$ en bas ($z = 0$) et un rayon de R en haut ($z = H$). La fumée est assimilée à un gaz parfait de masse molaire M. En bas sa température est T_0, sa pression P_0, sa vitesse verticale vers le haut $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_z}$. En haut, sa température est $T_1 = \alpha T_0$, sa pression P_0. Exprimer sa vitesse v_1 en fonction de v_0 et α en régime permanent. Commenter.

2. Confluence

Une rivière de débit massique D_1 et de vitesse v_1 se jette dans un fleuve de débit massique $D_2 = 4D_1$ et de vitesse $v_2 = \frac{v_1}{2}$. Les hauteurs d'eau dans la rivière et dans le fleuve avant et après la confluence sont égales à H. La vitesse du fleuve après la confluence est βv_1 et la largeur est la somme des largeurs des deux affluents. Déterminer β.

3. Mouvement d'une fusée à un étage

Relativement à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$, on considère le mouvement de translation d'une fusée à 1 étage. On désigne par $m(t)$ la masse de la fusée à l'instant t et par $\overrightarrow{v}(t)$ sa vitesse à cet instant. La fusée éjecte des gaz de combustion avec un débit massique D, ce courant gazeux ayant une vitesse uniforme $\overrightarrow{u}$ dans le référentiel de la fusée. Les seules forces extérieures envisagées sont les forces de pesanteur.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de la fusée dans $\mathcal{R}_0$.
2. La vitesse initiale de la fusée dans $\mathcal{R}_0$ est nulle. Calculer la vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ en fonction du rapport $r(t) = m_0/m(t)$, où m_0 est la masse initiale de la fusée.
3. On donne $u = 2400$ m.s^{-1}. Lorsque le comburant et le combustible sont épuisés, on a r =4,94. Calculer la variation de la vitesse de la fusée due à la seule éjection des gaz.

4. Rétrécissement d'une conduite

Un liquide incompressible (masse volumique $\mu = 1000$ kg.m^{-3}) est en écoulement parfait stationnaire dans une conduite qui se rétrécit, passant de la section S à la section s.

1. Qualitativement, comment est dirigée la force exercée par l'écoulement sur la conduite ?

   On va chercher à exprimer cette force en fonction des paramètres de l'écoulement.
2. La vitesse est V en amont, quelle est sa valeur v en aval ?
3. Sachant que la pression est P_1 en amont, quelle est la pression P_2 en aval ?
4. Que se passe-t-il lorsque V augmente suffisamment ? Donner la valeur limite V_ℓ pour de l'eau, avec $P_1 = 2.10^5$ Pa, $S = 1$ cm^2 et $s = 0,5$ cm^2.

   On supposera dans la suite que la vitesse V reste inférieure à V_ℓ.
5. En faisant un bilan de quantité de mouvement, évaluer la force exercée par le fluide sur la conduite en fonction de P_1, S, s, V et μ.

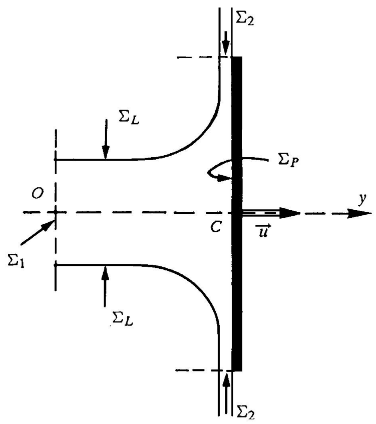
5. Jet sur une plaque mobile

Un jet d'eau cylindrique de révolution, d'axe horizontal Oy vient frapper une plaque schématisée par un disque d'axe Oy et de centre C. Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$, la vitesse de l'eau dans le jet est $\overrightarrow{V_1} = V_1\overrightarrow{e_y}$, tandis que la plaque est animée de la vitesse $\overrightarrow{u} = u\overrightarrow{e_y}$ avec $0 < u < V_1$.

On note ρ la masse volumique de l'eau, Σ_1 la section droite du jet incident, Σ_2 la surface de sortie du jet, Σ_P la surface de la plaque, Σ_L la surface latérale du jet, S_1, S_2, S_P les aires respectives de $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_P$, et P_0 la pression atmosphérique.

On supposera que, sur Σ_2, la vitesse est $\overrightarrow{V_2} = u\overrightarrow{e_y} + V_2'\overrightarrow{e_r}$, où $\overrightarrow{e_r}$ est un vecteur unitaire radial en coordonnées cylindriques d'axe Oy.

On négligera les efforts de pesanteur.



1. (a) Justifier l'expression de $\overrightarrow{V_2}$.
   (b) Déterminer V_2' en fonction de V_1 et u.
   (c) Montrer que la plaque est soumise à une force $\overrightarrow{F} = \rho S_1(V_1 - u)^2\overrightarrow{e_y}$.
2. Calculer dans $\mathcal{R}_0$, en fonction de ρ, S_1, V_1 et u :
   - la puissance mécanique $\mathcal{P}_m$ reçue par la plaque ;
   - le débit d'énergie cinétique $\mathcal{P}_{C_1}$ de l'eau à travers Σ_1 ;
   - le rendement $\eta = \mathcal{P}_m/\mathcal{P}_{C_1}$.

   Application numérique : $\rho = 10^3$ kg.m^{-3} ; $V_1 = 120$ m/s ; $u = 40$ m/s ; $S_1 = \pi.10^{-4}$ m^2.

6. Puissance fournie à une turbine

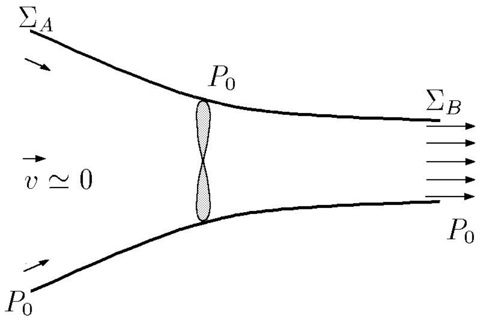
De l'eau circule dans une turbine de 1 vers 2. Les rayons des sections d'entrée et de sortie sont respectivement $R_1 = 15$ cm et $R_2 = 30$ cm. Le débit volumique est $D_V = 0,22$ m^3/s et la dénivellation est $z_1 - z_2 = 1$ m (axe des z vertival ascendat).

Les pressions en 1 et 2 sont $P_1 = 2,5.10^5$ Pa et $P_2 = 0,65.10^5$ Pa. L'eau est un fluide parfait et incompressible.

1. Faire un schéma.
2. Appliquer le théorème de la puissance mécanique au système fermé et mobile associé au système ouvert turbine (on note $\mathcal{P}$ la puissance cédée par l'eau à la turbine.
3. Évaluer numériquement chacun des trois termes qui contribue à la puissance cédée par l'eau à la turbine.

7. Étude d'une soufflerie

Une soufflerie est schématisée selon la figure ci-dessous.



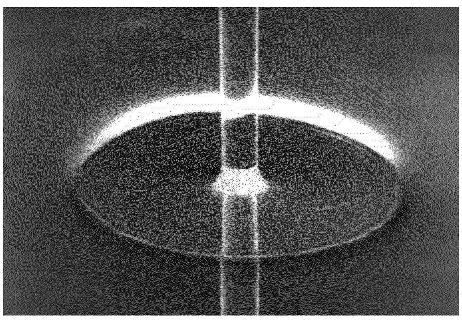
L'air sera supposé incompressible, homogène et parfait, de masse volumique $\rho = 1{,}3$ kg.m^{-3}. La pesanteur sera négligée. Le diamètre de sortie de la soufflerie est $D_B = 0{,}15$ m ; l'air y possède une vitesse $v_0 = 20$ m.s^{-1}. Au niveau de l'hélice, le diamètre est $D = 0{,}40$ m.

1. Déterminer, en fonction de ρ et v_0, la différence de pression $P_2 - P_1$ existant de part et d'autre de l'hélice.

2. Calculer la puissance utile $\mathcal{P}_M$ fournie par la soufflerie.

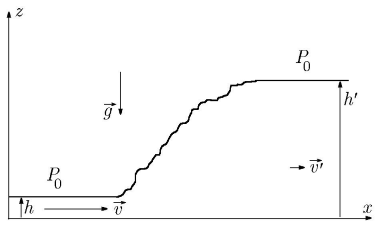
3. Donner les valeurs numériques de $P_2 - P_1$, $\mathcal{P}_M$ et de la norme F de la force exercée par le fluide sur l'hélice.

8. Ressaut hydraulique



Quand on observe, dans un évier, l'eau s'écoulant à partir du jet vertical issu du robinet, on remarque une région centrale de faible épaisseur et de grande vitesse, séparée d'une région de plus grande épaisseur (et donc de plus faible vitesse) par une zone où s'effectue une transition sous la forme d'un ressaut hydraulique.

Pour simplifier, on se limite ici à un problème unidimensionnel (selon Ox).



En amont du ressaut : hauteur d'eau h, vitesse uniforme $v\vec{e_x}$

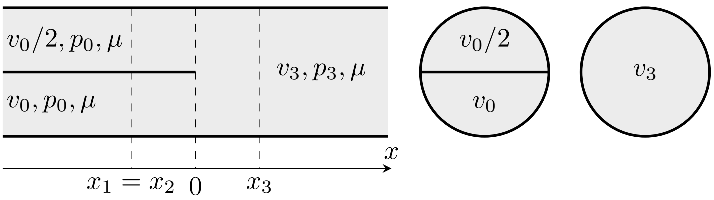
En aval du ressaut : hauteur d'eau h', vitesse uniforme $v'\vec{e_x}$

L'eau est considérée comme incompressible de masse volumique ρ ;
on introduit les nombres de Froude $\mathcal{F} = \dfrac{v}{\sqrt{gh}}$ et $\mathcal{F}' = \dfrac{v'}{\sqrt{gh'}}$.

1. Déterminer les relations définissant v et v' en fonction de h, h', g.
Attention : l'hypothèse de l'écoulement parfait est en défaut dans la zone du ressaut.
Déduire du résultat que $\mathcal{F} > 1$ et $\mathcal{F}' < 1$.

2. Faire un bilan d'énergie cinétique et constater le bien fondé de l'avertissement précédent en évaluant la puissance dissipée par viscosité dans la zone du ressaut.

9. Homogénéisation d'un écoulement



Une canalisation cylindrique d'axe horizontal $x'x$ et de section S est partagée jusqu'en $x = 0$ en deux canalisations de section $S/2$ (Fig. de gauche) dans lesquelles un même fluide de masse volumique μ s'écoule avec des vitesses uniformes et stationnaires $\vec{v}_1 = v_0\,\vec{u_x}$ et $\vec{v}_2 = (v_0/2)\,\vec{u_x}$. Les deux écoulements se rejoignent en $x = 0$ et suffisamment loin de $x = 0$, l'écoulement est uniforme et stationnaire de vitesse $\vec{v}_3 = v_3\,\vec{u_x}$. On note p_0 la valeur commune de la pression dans les écoulements (1) et (2) et p_3 la pression dans l'écoulement (3).

Les figures de droite donnent les vues en coupe de la canalisation pour $x < 0$ et $x > 0$.

1. Quel phénomène physique est à l'origine de l'homogénéisation des vitesses dans la conduite (3) ?

2. En considérant un système fermé associé au système ouvert $(\mathcal{S})$ constitué à l'instant t du fluide contenu entre une section d'entrée d'abscisse $x_1 = x_2$ où l'écoulement est homogène et une section de sortie d'abscisse x_3 où l'écoulement est homogène, établir les expressions de v_3 et p_3 en fonction de v_0, p_0 et μ.

3. En faisant un bilan énergétique pour le même système fermé, établir l'expression de la puissance des forces intérieures. Commenter.