Devoir surveillé n^{o}4

Samedi 18 janvier 2025

Durée : 4h00

Piste rouge

- Vous devez vérifier que le sujet comprend 12 pages numérotées et une annexe à rendre p.13.
- Vous êtes invités à porter une attention toute particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Toute réponse devra être justifiée et ce, même si l'énoncé ne le précise pas (sauf mention particulière).
- Vous devez établir une relation littérale avant d'effectuer toute application numérique (sauf mention particulière).
- Toute relation littérale présentant une erreur flagrante d'homogénéité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- Le téléphone portable est strictement interdit. Il doit être rangé éteint dans le sac.
- La calculatrice est autorisée.

Première partie

Écoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère

On considère un fluide newtonien visqueux de viscosité η, incompressible et de masse volumique μ.

Données numériques :

— Accélération de la pesanteur : $g = 9,81$ m.s^{-2}
— Masse volumique de l'air : $\mu = 1,29$ kg.m^{-3}
— Viscosité de l'air : $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Pl
— Masse volumique de l'huile de ricin : $\mu' = 965$ kg.m^{-3}
— Viscosité de l'huile de ricin : $\eta' = 1,00$ Pl
— Masse volumique du verre : $\rho = 2,50 \cdot 10^3$ kg.m^{-3}

Formulaire :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{v})) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{v}) - \vec{\Delta}\vec{v}$$

En coordonnées sphériques : $\mathrm{div}\,\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial\, r^2 v_r}{\partial\, r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\,\sin\theta v_\theta}{\partial\,\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\, v_\varphi}{\partial\,\varphi}$

$$\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3}$$

I Préliminaires

1. On s'intéresse, dans ce fluide, à un écoulement unidirectionnel de la forme $\overrightarrow{v}(M,t) = v(y,t)\overrightarrow{e}_x$; donner l'expression de la force de viscosité exercée par la particule de fluide P_1 sur la particule de fluide P_2 (figure 1), leur surface de contact étant notée S.
2. En déduire que l'on peut définir une force volumique de cisaillement, dont on donnera l'expression dans le cas du champ de vitesse considéré ici. On admettra par la suite que cette force volumique se généralise à tout écoulement incompressible sous la forme $\eta\Delta\overrightarrow{v}$.
3. En l'absence de force volumique extérieure, établir l'équation locale de la dynamique du fluide.

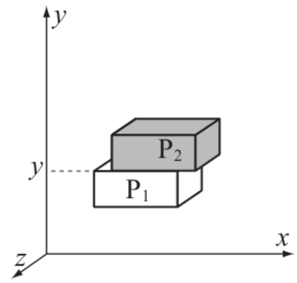

FIGURE 1 – Contact entre deux particules de fluide

II Écoulement autour d'une sphère

On s'intéresse maintenant à l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère de rayon R en l'absence de toute force extérieure. On utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'axe Oz (définitions figure 2), O étant le centre de la sphère.
On se place dans le référentiel de la sphère et on suppose que, loin de la sphère, l'écoulement du fluide est uniforme, de vitesse $\overrightarrow{v} = V_0\overrightarrow{e_z}$ et de pression P_0.

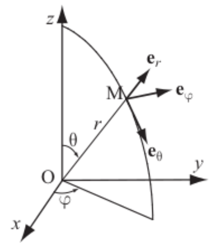

FIGURE 2 – Coordonnées sphériques et base locale

1. Bâtir, à partir des grandeurs caractéristiques du fluide μ, η et V_0, une grandeur D_0 homogène à une distance.
2. Exprimer le nombre de Reynolds relatif à l'écoulement étudié en fonction de $D = 2R$ (considérée comme la distance caractéristique de l'écoulement) et de D_0.
3. Le fluide considéré est de l'air de vitesse $V_0 = 10$ m.s^{-1}. Calculer le nombre de Reynolds pour une sphère de rayon $R = 0,50$ cm, puis pour une sphère de rayon $0,50$ μm. Comment peut-on qualifier l'écoulement dans les deux cas ? Dessiner sommairement l'allure des lignes de courant correspondantes.
4. Justifier que la force résultante $\overrightarrow{F}$, appelée force de traînée, correspondant aux actions sur la sphère du fluide en mouvement, est de la forme $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{e_z}$.
5. Justifier que le coefficient de traînée de la sphère, dont l'expression est donnée ci-dessous, ne dépend que du nombre de Reynolds pour un fluide fixé :

$$C_x = \frac{F}{\frac{1}{2}\mu V_0^2\pi R^2}$$

6. Commenter la courbe (Annexe 1 en fin de sujet, à rendre avec la copie) donnant l'évolution du coefficient de traînée C_x pour une sphère en fonction du nombre de Reynolds. Placer en particulier les points correspondant aux applications numériques de la question II.1 si cela est possible.
7. Dans le cas d'une chute libre d'une sphère de rayon $R = 0,50$ cm, quelle expression approximative de la force de frottement de l'air peut-on utiliser ?

III Établissement de la formule de Stokes

Toujours dans le cas de l'écoulement autour d'une sphère, avec les notations de la partie précédente, on se place maintenant en régime permanent et on suppose la vitesse suffisamment faible pour négliger l'accélération convective.

1. Quelles sont alors les conditions imposées sur le champ des vitesses par :
   (a) l'incompressibilité de l'écoulement,
   (b) la présence de la sphère,
   (c) la forme du champ dans les régions éloignées de la sphère,
   (d) l'équation locale de la dynamique.

   On donne le champ des vitesses suivant :

$$\overrightarrow{v} = V_0 \cos\theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right)\overrightarrow{e_r} - V_0 \sin\theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

   et le résultat :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{v}\right)\right) = -\frac{3V_0R}{2r^3}\left(2\cos\theta\overrightarrow{e_r} + \sin\theta\overrightarrow{e_\theta}\right)$$

2. Vérifier que ce champ satisfait les conditions a) à c) de la question III.1.
3. L'écoulement est-il rotationnel ? irrotationnel ? laminaire ? turbulent ? potentiel ? stationnaire ?
4. En utilisant l'équation locale de la dynamique linéarisée, déterminer le champ de pression en tout point de l'écoulement.
5. Calculer la résultante des forces de pression sur la sphère.
6. On admet que la force de cisaillement exercée par le fluide sur un élément de surface de la sphère est donnée par :

$$\overrightarrow{dF_{cis}} = -\frac{3\eta V_0 R \sin^2\theta}{2} d\theta d\varphi \overrightarrow{e_\theta}$$

   Justifier cette expression par comparaison à l'étude de la question I.1 et calculer la résultante des forces de cisaillement exercées sur la sphère.
7. En déduire que la force de traînée exercée sur la sphère est donnée par la formule de Stokes :

$$\overrightarrow{F} = 6\pi\eta R V_0 \overrightarrow{e_z}$$

   et que ce résultat est compatible avec la courbe de l'annexe 1 donnant le coefficient de traînée.
8. Application : on observe la chute libre dans l'huile de ricin d'une bille de verre de rayon R ; déterminer la condition sur R pour laquelle l'expérience permet de mesurer la viscosité de l'huile et proposer un protocole.

Deuxième partie

A memristor is a pipe whose diameter varies

En 1971, le professeur Leon Chua - qui exerça à l'Université de Berkeley - prédit l'existence d'un dipôle passif nouveau capable de servir de mémoire. Ce dipôle venant complèter la liste des trois dipôles fondamentaux de l'électricité à savoir le résistor, la bobine et le condensateur. Le terme de memristor qu'il inventa résulte de la contraction des deux termes memory et resistor.

Leon Chua a décrit le memristor comme un tuyau dans lequel s'écoulerait un fluide, tuyau dont le diamètre varierait en fonction de la valeur du débit du fluide et du sens dans lequel le fluide le traverserait.

Dans ce problème, on étudie l'écoulement lent d'un liquide incompressible de viscosité dynamique η dans un tuyau cylindrique de section circulaire S, de rayon a et de longueur ℓ. On considère que le tuyau est horizontal. L'écoulement est la conséquence d'un écart de pression entre l'entrée, où la pression est P_e, et la sortie, où la pression est $P_s < P_e$. Ces pressions sont supposées maintenues au cours du temps. L'objectif est de déterminer l'expression de la résistance hydraulique correspondant à l'écoulement dans le tuyau et de voir qu'en modifiant le diamètre du tuyau, on a bien une évolution de la résistance hydraulique permettant de faire l'analogie proposée par Leon Chua pour le memristor en électricité et sa résistance électrique.

Afin d'avoir une approche relativement réaliste de l'écoulement, on prend en compte le fait que le champ des vitesses dans le fluide n'est pas uniforme dans une section donnée de l'écoulement.

A. Modélisation d'un écoulement

On considère un écoulement incompressible, laminaire et en régime permanent dans un tube cylindrique d'axe horizontal Oz. On note μ la masse volumique du fluide incompresssible.

On néglige l'effet de la pesanteur. On rappelle que la densité volumique des forces de viscosité s'écrit : $\eta\Delta\overrightarrow{v}$.

1. Quelle(s) hypothèse(s) nous conduit (conduisent) à chercher l'expression de $\overrightarrow{v}$ sous la forme : $\overrightarrow{v} = v(r,z)\overrightarrow{e_z}$?
2. Rappeler l'équation locale de conservation de la masse. En déduire que la vitesse $v(r,z)$ ne dépend pas de z. On la notera donc $v(r)$ par la suite.
3. Par application de l'équation de Navier Stokes :
   (a) montrer que la pression P ne dépend pas de r,
   (b) montrer que la fonction $v(r)$ vérifie l'équation différentielle : $\dfrac{\eta}{r}\left[\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{dr}\right)\right] = K$, où K est une constante à déterminer en fonction de P_s, P_e et ℓ.
4. En remarquant que $v(r)$ reste finie et en précisant une autre condition aux limites, déterminer l'expression de $v(r)$ en fonction de K, η, r et a. Quel est le signe de K lorsque $v > 0$?
5. Déterminer l'expression du débit volumique, noté $\mathcal{D}_{\text{vol}}$, en fonction de K, η et a.
6. À quelle distance r de l'axe la vitesse est-elle maximale ? En notant v_0 cette vitesse maximale, exprimer v_0 en fonction de $\mathcal{D}_{\text{vol}}$ et a.
7. Le nombre de Reynolds est défini comme le quotient de deux termes de même dimension. Comment se nomment ces deux termes ?

   Préciser alors l'expression du nombre de Reynolds en fonction de ρ, a, η et $\mathcal{D}_{\text{vol}}$. On admettra que la vitesse caractéristique de l'écoulement correspond à la vitesse moyenne : $U = \dfrac{\mathcal{D}_{\text{vol}}}{\pi a^2}$.

B. Résistance hydraulique

La résistance hydraulique est définie par la formule $R_{\text{hyd}} = \dfrac{P_e - P_s}{\mathcal{D}_{\text{vol}}}$.

8. Montrer qu'il existe une analogie entre la définition de la résistance hydraulique et celle de la résistance électrique, on précisera soigneusement les différents termes de cette analogie. Connaissez-vous, dans un autre domaine de la Physique, une autre résistance ? Y a-t-il une analogie possible avec les deux précédentes ?
9. Déterminer l'expression de la résistance hydraulique R_{hyd} dans le cadre du modèle d'écoulement utilisé.

Données :

— Valeur critique du nombre de Reynolds : 2300.

— $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

— $\text{div}\,\overrightarrow{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

— $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$

— $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$,

— $\Delta\overrightarrow{a} = \left(\Delta a_r - \dfrac{1}{r^2}(a_r + 2\dfrac{\partial a_\theta}{\partial \theta})\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\Delta a_\theta - \dfrac{1}{r^2}(a_\theta - 2\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta})\right)\overrightarrow{u_\theta} + (\Delta a_z)\overrightarrow{u_z}$.

Troisième partie

Débitmètres pour eaux usées

L'encombrement des eaux d'égout par des débris solides interdit l'usage de débitmètres comportant des parties mobiles immergées dans le fluide. La mesure du débit en différents points de la station, pratiquée à des fins de surveillance, doit pouvoir être effectuée soit en canalisation fermée, la conduite étant alors remplie d'eau sous pression, soit en canalisation ouverte, la surface libre du liquide étant alors à la pression atmosphérique.

I Déversoir à seuil mince en canal ouvert

On considère un canal à fond plat dans lequel circulent les eaux usées, assimilées à un fluide parfait dont l'écoulement est irrotationnel et stationnaire. Loin en amont du déversoir, on note $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v}(M_1) = v_1\overrightarrow{u_x}$ la vitesse du fluide et h la profondeur d'eau. Le déversoir à seuil mince consiste en une plaque métallique étroite, de hauteur H (appelée « pelle ») (voir figure 4). L'ensemble a une largeur B suivant $\overrightarrow{u_y}$. On note $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$ l'accélération de la pesanteur. On fait de plus les hypothèses suivantes

— les lignes de courant du fluide sont supposées horizontales dans la section verticale passant par la pelle :

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v}(M_2) = v_2(z)\overrightarrow{u_x}$$

— la pression au sein du fluide dans la section de la pelle est assimilée à la pression atmosphérique P_0 ;

— le débit est faible : $h - H \ll H$.

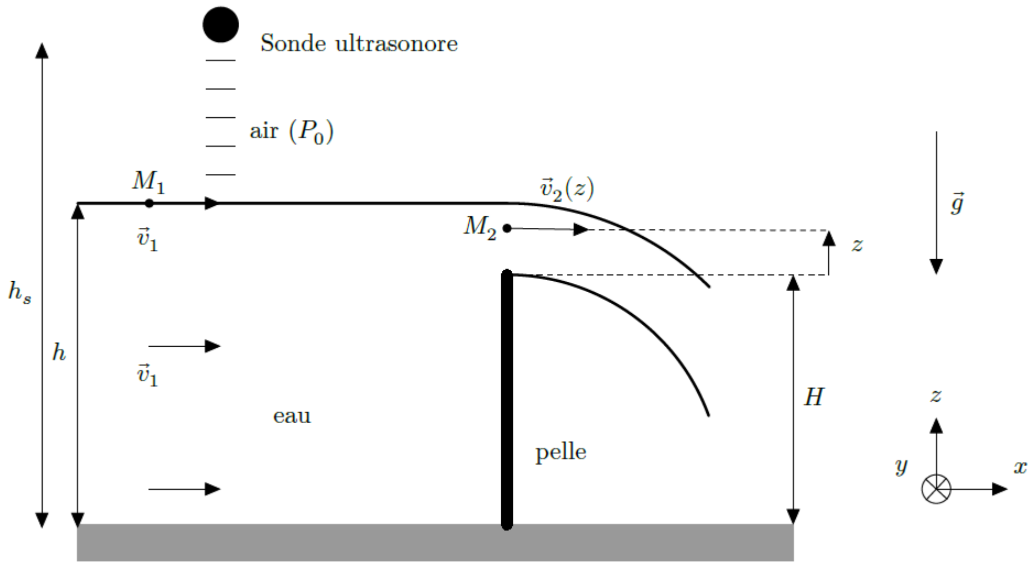

Figure 4 – Déversoir en canal ouvert (vue de côté)

10. (a) Montrer que $v_{2,\max} \gg v_1$, où $v_{2,\max}$ est la valeur maximale de $v_2(z)$. On supposera par la suite que $\forall z, v_2(z) \gg v_1$.
    (b) Exprimer la vitesse $v_2(z)$au point M_2 en fonction de g, h, H et z.
11. En déduire que le débit volumique Q peut s'écrire sous la forme $Q = A(h - H)^{3/2}$ où A est une constante que l'on exprimera en fonction de B et g.
12. On mesure la hauteur h du fluide en amont grâce à une sonde utilisant des ondes ultrasonores. Cette sonde émet une impulsion, puis mesure le décalage temporel Δt de l'impulsion réfléchie par la surface des eaux. Exprimer h en fonction de la hauteur h_s à laquelle est fixée la sonde, de la vitesse c des ondes ultrasonores dans l'air et de Δt.

II Jaugeur Venturi en canal ouvert

1. Préliminaire : écoulement fluvial ou torrentiel

   Soit de l'eau assimilée à un liquide parfait en écoulement stationnaire et irrotationnel dans un canal à fond plat de largeur B. On note $h(x)$ la hauteur d'eau dans le canal et $\vec{v} = v(x)\vec{u_x}$ la vitesse du fluide, uniforme sur une section (voir figure 5). La surface libre est à la pression atmosphérique P_0.

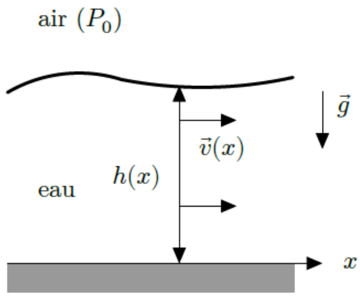

Figure 5 — Modèle d'écoulement dans un canal plat

   (a) On appelle charge spécifique la grandeur $H(x) = h(x) + \dfrac{v^2(x)}{2g}$. Montrer que $H(x)$ est constant pour l'écoulement considéré.

   (b) Exprimer H en fonction de $h(x)$ et du débit volumique Q. Tracer l'allure de $H(h)$. En déduire que pour un débit volumique et une charge spécifique fixés, il existe en général deux hauteurs h' et h'' possibles pour l'écoulement, avec $h'' > h'$. La solution (h', v') est appelée *régime torrentiel* et la solution (h'', v'') *régime fluvial*. Justifier ces appellations. Indiquer la zone correspondant à chaque régime sur le tracé de $H(h)$.

   (c) À débit fixé, déterminer les valeurs h_c et v_c qui minimisent la charge spécifique, en fonction de Q et des données. La solution (h_c, v_c) correspond au *régime critique*. Exprimer la charge spécifique critique H_c en fonction de h_c. Pourquoi observe-t-on fréquemment des ondulations importantes de la surface libre au voisinage du régime critique ?

   (d) À charge spécifique fixée, tracer l'allure de $Q(h)$. Pour quelle valeur de h le débit est-il maximal ? Identifier les zones d'écoulement fluvial et torrentiel sur le graphe.

2. **Jaugeur Venturi**

   Un débitmètre à jaugeur Venturi est constitué d'un *canal d'approche* à fond plat de largeur B constante et de longueur au moins égale à $10 \times B$, suivie d'un *canal de mesure* dans lequel le fluide traverse un convergent, un canal droit de largeur b, puis un divergent (voir figure 6). Deux sondes ultrasonores à la verticale des points I et J mesurent les hauteurs d'eau h_1 et h_2. On note $\overrightarrow{v_1} = v_1\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{v_2} = v_2(x)\overrightarrow{u_x}$ les vitesses du fluide respectivement en amont du Venturi et dans le canal de largeur b. Les vitesses sont supposées uniformes sur une section droite.

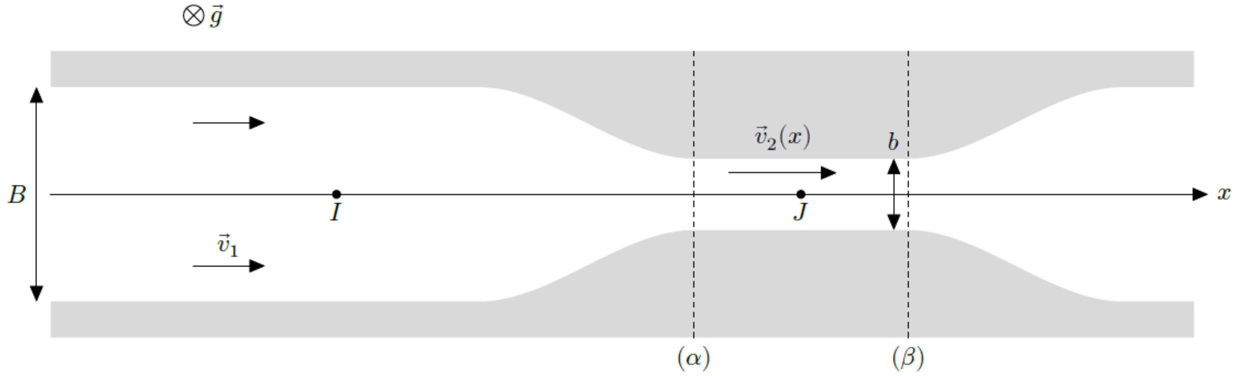

Figure 6 — Vue de dessus d'un jaugeur Venturi

Dans le cas d'un jaugeur Venturi *noyé*, le régime d'écoulement demeure fluvial. Dans le cas d'un jaugeur

Venturi *dénoyé*, le régime d'écoulement, fluvial en amont, devient progressivement torrentiel entre les sections (α) et (β), en passant par le régime critique, avant de brutalement redevenir fluvial dans le divergent du Venturi, avec présence d'un ressaut hydraulique. On pourra négliger la variation de la charge spécifique H lors du passage par le convergent.

(a) Quel est le rôle du canal d'approche ?

(b) Écrire le débit volumique Q en fonction de v_1, B, h_1 puis en fonction de $v_2(x), b, h_2(x)$.

(c) *Cas du jaugeur noyé* — La vitesse $v_2(x)$ est alors uniforme dans tout le canal droit $v_2(x) = v_2$. Grâce aux résultats de la question 1.b, tracer sur le même graphe l'allure des fonctions qui relient la charge spécifique à la hauteur d'eau h, respectivement $H_B(h)$ dans le canal de largeur B et $H_b(h)$ dans le canal de largeur $b < B$.
Indiquer sur ce graphe la transformation $1 \to 2$ subie par le fluide au passage par le convergent. En déduire le signe de $(h_2 - h_1)$, puis justifier celui de $(v_2 - v_1)$. En supposant $v_2 \gg v_1$, exprimer le débit volumique Q en fonction de g, b, h_1 et h_2.

(d) *Cas du jaugeur dénoyé* — On suppose l'écoulement assez lent en amont, de sorte que l'on pourra considérer que $v_1 \ll \sqrt{2gh_1}$. En s'appuyant notamment sur les résultats de la question 1.c, montrer que l'existence d'un régime critique en un point du canal de largeur b permet de relier Q uniquement à la hauteur d'eau en amont par la relation

$$Q \simeq 0,544\sqrt{b}h_1^{3/2}$$

On vérifiera que la relation exacte trouvée correspond bien à la relation approchée donnée par l'énoncé. Dimensionner le jaugeur Venturi en calculant la valeur numérique de b pour $h_1 = 50$ cm et $Q = 1000$ m^3.h^{-1}. La norme ISO4359 précise que les largeurs b utilisées doivent rester supérieures à 10 cm, quel effet risquerait de fausser la mesure sinon ?

(e) Quel avantage y a-t-il à utiliser un jaugeur dénoyé plutôt qu'un jaugeur noyé ?

Quatrième partie

Physique du skimboard

Le skimboard est un sport qui se pratique au bord de la plage. Cette partie s'intéresse à une pratique nommée «flat». À marée basse, l'eau qui se retire lentement laisse des étendues où seule subsiste une mince couche d'eau. Le sportif lance une planche devant lui, court et monte dessus : il peut ainsi glisser sur plusieurs mètres. La planche est légèrement inclinée : l'avant pointant vers le haut. Messieurs Tuck et Dixon de l'Université d'Adélaïde (Australie) ont proposé le modèle suivant pour rendre compte du mouvement de la planche.

Le référentiel lié à la plage est supposé galiléen. L'eau est assimilée à un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ. Elle est surmontée par de l'air à la pression p_0 ou par la planche. L'écoulement de l'eau est supposé plan. L'influence de la gravité est négligée dans l'étude de l'écoulement. La planche, supposée rectangulaire de largeur L, se déplace à la vitesse $-\overrightarrow{V} = -V\overrightarrow{u_x}$ constante par rapport au référentiel lié à la plage et fait un angle α avec l'horizontale (dit angle d'attaque) supposé petit dans tout le problème. Loin de la planche, l'eau est supposée au repos dans le référentiel lié à la plage.

La figure 1 représente quelques paramètres du problème dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à la planche. Le mouvement de la planche provoque un jet d'eau d'épaisseur δ qui se détache de l'avant de la planche.

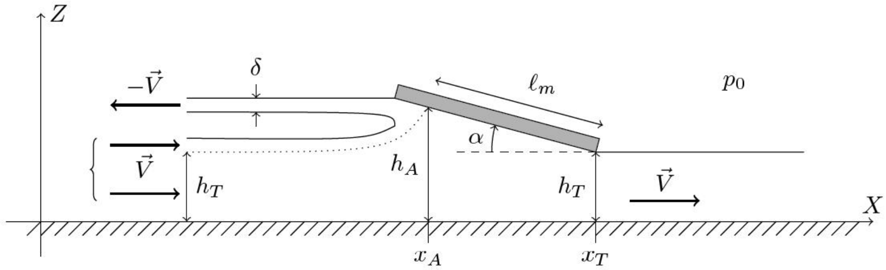

Figure 1 - Modélisation de l'écoulement dans le référentiel lié à la planche

Au-dessus de la ligne de courant en pointillé, l'eau constitue le jet. En-dessous, l'eau s'écoule vers l'arrière de la planche. Loin à l'avant de la planche, la hauteur d'eau est $h_T + \delta$ tandis qu'elle vaut h_T derrière. La surface de la planche qui n'est pas en contact avec le jet est dite « surface mouillée ». Elle est de longueur ℓ_m. La hauteur d'eau h_A désigne la hauteur du point de stagnation (défini comme l'intersection de la planche et de la ligne de courant en pointillé).

On notera $\overrightarrow{P}(\Sigma)|R$ la quantité de mouvement d'un système Σ par rapport au référentiel R et on définit $P_x(\Sigma) = \overrightarrow{P}(\Sigma)|R \cdot \overrightarrow{u_x}$.

Sauf indication contraire, l'étude sera menée dans le référentiel R lié à la planche où l'écoulement est stationnaire.

I Calcul de la résultante des forces pressantes s'exerçant sur la planche

Dans cette partie on travaillera dans la région située sous la surface mouillée ($x \in [x_A; x_T]$). On suppose que la hauteur d'eau h, la pression dans l'eau p et le champ des vitesses dans l'eau $\overrightarrow{v}$ ne dépendent que de l'abscisse x du point de l'écoulement considéré. Le champ des vitesses est a priori bidimensionnel mais en de nombreux points de l'écoulement la composante verticale de la vitesse est négligeable devant la composante horizontale ainsi $\overrightarrow{v} \simeq v(x)\overrightarrow{u_x}$. On note $\overrightarrow{v}(x_A) = v_a\overrightarrow{u_x}$ où x_A est l'abscisse du point de stagnation.

A. Résultats préliminaires

Q1- En faisant un bilan de masse sur un système que vous expliciterez, montrer la relation $h_T V = h(x)v(x)$.

Q2- Rappeler l'équation locale de conservation de la masse. À quelle relation entre V et $v(x)$ mène-t-elle ? Cette relation est en contradiction avec la relation précédente : lever le paradoxe.

Q3- Dans le cadre de ce modèle, l'écoulement est-il rotationnel ? On justifiera.

Q4- Rappeler l'énoncé du théorème de Bernoulli approprié à ce modèle et le démontrer.

B. Calcul direct

Q5- Soit x désignant l'abscisse d'un point situé sur la surface mouillée de la planche, montrer que :

$$p(x) - p_0 = \frac{1}{2}\rho V^2 \left[1 - \frac{h_T^2}{h^2(x)}\right]$$

Q6- Établir une expression de $h(x)$ en fonction de α, h_T, x et x_T.

Q7- On suppose que la pression de l'eau au contact de la surface non mouillée de la planche est p_0. La résultante totale des forces de pression $\overrightarrow{F}$ que les fluides exercent sur la planche possède deux composantes : $\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{u_x} + F_z\overrightarrow{u_z}$. On cherche leurs expressions approchées dans le cadre des faibles valeurs de l'angle α. Montrer que

$$F_z = \frac{\rho V^2}{2} L\ell_m(1-\lambda)$$

où l'on donnera l'expression de λ en fonction de h_T et h_A. Établir l'expression de F_x.

Q8- Soit T un point situé à l'arrière de la planche. Justifier précisément que le moment des forces de pression $\mathcal{M}$ par rapport à l'axe $(T;\overrightarrow{u_y})$ est

$$\mathcal{M} = K\int_{x_A}^{x_T}(x_T - x)\left[1 - \frac{h_T^2}{h^2(x)}\right]dx$$

où l'on exprimera K en fonction de données de l'énoncé. On ne demande pas de calculer cette intégrale.

Q9- Un calcul, que l'on ne demande pas de mener, permet d'établir que

$$\mathcal{M} = \frac{1}{4}\rho V^2 L\ell_m f(\lambda)$$

où f est une fonction de λ. Exprimer, en fonction de ℓ_m, f et λ, la distance ℓ_p de l'axe $(T;\overrightarrow{u_y})$ à laquelle doit se placer le sportif pour qu'il puisse être à l'équilibre dans R (on supposera que la planche possède une masse négligeable devant celle du sportif). On admettra que $\ell_p < \ell_m$.

C. Calcul par un bilan de quantité de mouvement

On se propose, par un bilan de quantité de mouvement, de retrouver la résultante des forces de pression s'exerçant sur la planche.

Q10- En choisissant comme système fermé Σ, l'eau contenue dans le volume situé sous la planche entre les abscisses x_A et x_T (zone hachurée sur la figure 2) et celle qui va pénétrer dans ce volume entre les dates t et $t + dt$, trouver une relation liant $dP_x(\Sigma)/dt|R, \rho, L, h_T, \lambda$ et V .

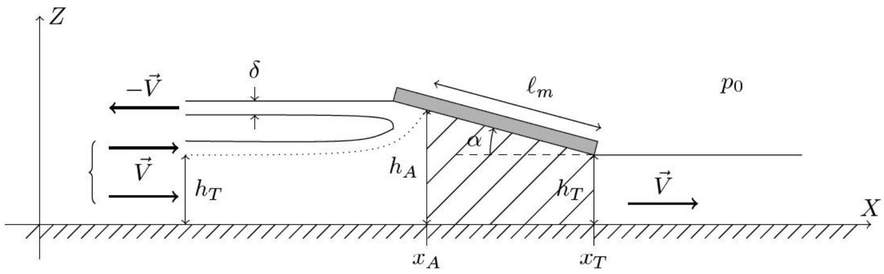

Figure 2

Q11- On note p_A la pression en $x = x_A$: $p_A = p(x_A)$. Montrer que la composante selon l'axe x de la résultante des forces s'exerçant sur Σ peut s'écrire $(p_A - p_0)h_A L - F_x$.

Q12- Retrouver les expressions de F_x et F_z établies à la question Q7.

II Mouvement de la planche dans le référentiel terrestre

Q13- L'expression de la résultante des forces de pression sur la planche établie dans les questions précédentes en régime stationnaire persiste (approximativement) en régime non stationnaire. On note m la masse du sportif et de la planche. En se plaçant dans le référentiel lié à la plage, montrer que V est solution de l'équation : $dV/dt = -g\alpha$.

Q14- On suppose h_T connu.

(a) Établir l'expression de la fonction $\ell_m(V, \alpha)$. On fera intervenir les paramètres suivants : m, g, ρ, L et h_T.

(b) Si l'angle α est constant, expliquer en une phrase pourquoi il est nécessaire que la vitesse V dépasse une valeur minimale.

(c) Un professeur de physique a filmé son fils en train de faire du skimboard au bord de la plage. La largeur de la planche est $L = 70$ cm, sa longueur $L_0 = 1,40$ m. Il mesure que le skimboard a été lancé avec une vitesse initiale $V(t = 0) = 2,7$ m.s^{-1} et faisait un angle constant pratiquement égal à $\alpha = 2,0^o$. On a tracé figure 3 la courbe $\ell_m(V, \alpha = 2,0^o)$ avec les paramètres du problème ($m = 35$ kg, $g = 10$ m.s^{-2}, $h_T = 2,0$ cm, $\rho = 1,0 \times 10^3$ kg.m^{-3}). ℓ_m est exprimé en mètre et V en mètre par seconde. Estimer la distance parcourue par l'enfant.

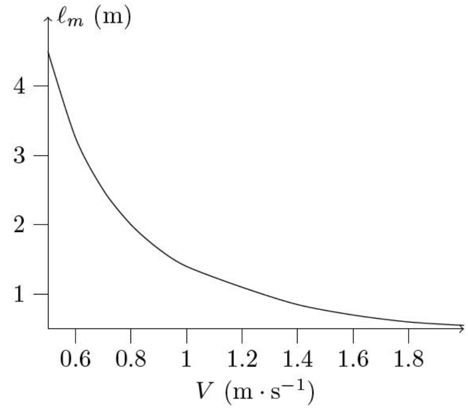

Figure 3 - $\ell_m(V)$ ($\alpha = 2,0^o$)

Q15- Le modèle néglige une ou plusieurs forces. Laquelle ou lesquelles ?

III Nécessité du jet d'eau

On se propose dans cette partie de montrer la nécessité de l'existence du jet d'eau pour assurer la consistance du modèle.

Q16- En choisissant, comme système fermé $\overline{\Sigma}$, l'eau contenue dans le volume hachuré figure 4 et celle qui va pénétrer dans ce volume entre les dates t et $t+dt$, trouver une relation liant $dP_x(\overline{\Sigma})/dt|R, \rho, L, \delta$ et V.

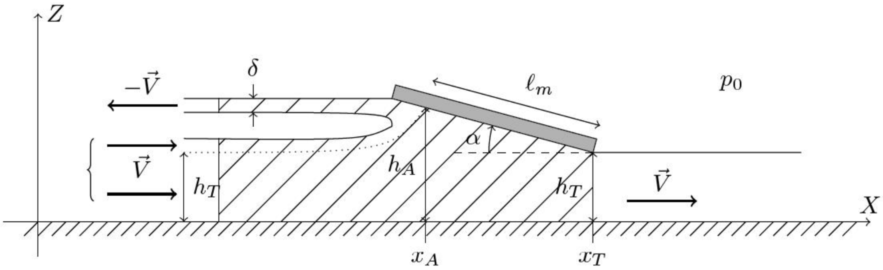

Figure 4

Q17- En déduire une relation liant $F_z, \rho, L, \delta, \alpha$ et V. Conclure.

Q18- Donner un ordre de grandeur de δ en utilisant les données numériques de la question Q14 pour une vitesse $V = 2$ m.s^{-1}.

Annexe 1, à rendre avec la copie, NOM : ....

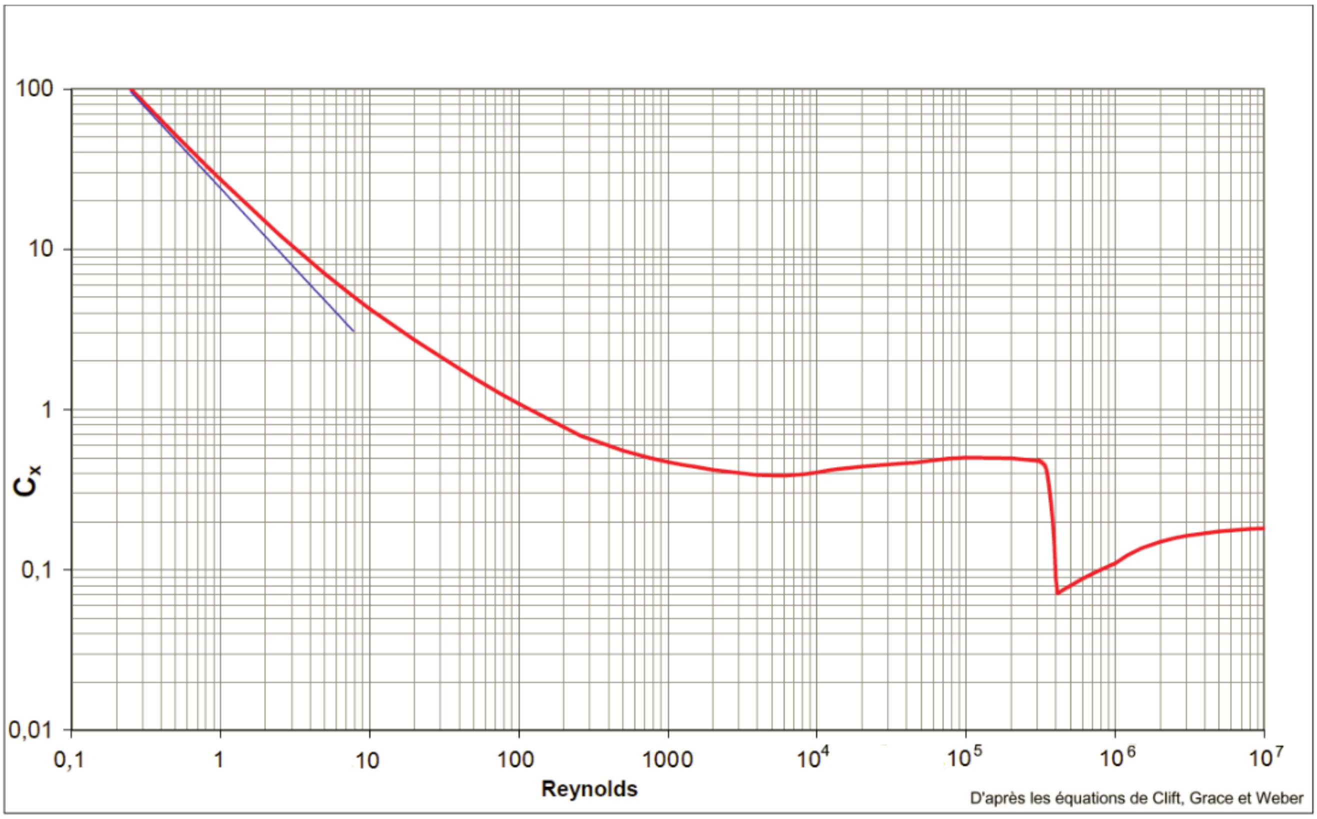

FIGURE 5 – Coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds relatif au diamètre