(1h)

34 Ecoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère.

I – Préliminaires

1) $\vec{v}(M,t) = v(y,t)\,\vec{e_x}$

$$\boxed{\vec{F}_{visc\,1\to2} = -\eta \frac{\partial v}{\partial y}\,\vec{e_x}\,.\,S.}$$

2) Σ = particule P_2

En y $\quad \vec{F}_{visc}(y) = -\eta \frac{\partial v(y)}{\partial y}\,S\,\vec{e_x}$

En $y+dy$ $\quad \vec{F}_{visc}(y+dy) = +\eta \frac{\partial v(y+dy)}{\partial y}\,S\vec{e_x}$

$$\vec{F}_{visc\,tot} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y)\,\underbrace{dy\,S}_{dV}\,\vec{e_x}$$

$$\vec{f}_v = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,\vec{e_x}$$

$$\vec{f}_{vis} = \eta\,\Delta\vec{v}$$

3) Σ = particule de fluide
Réf terrestre galiléen
Bilan des forces
forces pressantes $\quad \vec{f}_p = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P$
forces de cisaillement $\quad \vec{f}_{cis} = \eta\,\Delta\vec{v}$

Loi de la quantité de mouvement

$$\boxed{\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}}\, P + \eta \Delta \vec{v}}$$

40/40

II – Ecoulement autour d'une sphère

1) On veut $D_0 = \mu^{\alpha} \eta^{\beta} V_0^{\gamma}$

avec $[\mu] = M L^{-3}$

$[V_0] = L T^{-1}$

$$[\eta] = \frac{[\text{force}]}{L\,[\text{vitesse}]} = \frac{M L T^{-2}}{L^2 T^{-1}}$$

$$= M L^{-1} T^{-1}$$

D'où

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ 1 &= -3\alpha - \beta + \gamma \\ 0 &= -\beta - \gamma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = -\alpha, \qquad \gamma = -\beta = +\alpha$$

$$1 = -3\alpha + \alpha + \alpha = -\alpha$$

$\alpha = -1$; $\gamma = -1$; $\beta = 1$.

45

$$\boxed{D_0 = \frac{\eta}{\mu V_0}.}$$

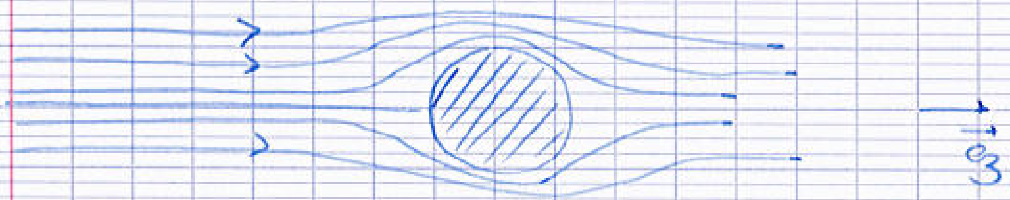
2) On a $Re = \frac{\mu L U}{\eta}$

$$= \mu \frac{D V_0}{\eta}$$

$$\boxed{Re = \frac{D}{D_0}}$$

3) $R_{e_1} = 7{,}2\ 10^{3}$ pour $R = 0{,}50$ cm.
Ecoulement turbulent.
$R_{e_2} = 7{,}2\ 10^{-1}$ pour $R = 0{,}50$ µm.

L'écoulement est laminaire



4) Situation invariante par rotation autour de l'axe $Oz \rightarrow \vec{F}$ selon $\vec{e_z}$

5. $$C_x = \frac{F}{\frac{1}{2} \mu V_0^2 \pi R^2}$$

$$[C_x] = \frac{[\text{force}]}{M L^{-3} L^2 T^{-2} L^2} = \frac{M L T^{-2}}{M L^1 T^{-2}} = 1$$

C_x est sans dimension.
C_x ne dépend que d'un nombre sans dimension Re.

6) Pour $Re < 1$ C_x décroît linéairement avec Re (pente -1 en échelle log - log)

Pour $Re \in [700 - 3.10^5]$ C_x ne dépend pas de Re $C_x = 0,5$.

7). On a $\vec{F} \simeq 0,4 \times \frac{1}{2} \rho \pi R^2 V_0^2 \vec{e_3}$

$\vec{F} = 0,2 \rho \pi R^2 V_0^2 \vec{e_3}$ forme quadratique.

56 III Etablissement de la formule de Stokes

1. (a) Ecoulement incompressible

$\Rightarrow \mathrm{div}\, \vec{v} = 0$

(b) Présence de la sphère fixe ds le référentiel d'étude

$\vec{v}(R, \theta, \varphi) = \vec{0}$

Condition d'adhérence

(c) Dans les régions éloignées

$\lim\limits_{R \to +\infty} \vec{v}(r, \theta, \varphi) = V_0 \vec{e_3}$

(d). $\vec{0} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P + \eta \Delta \vec{v}$

58

2) a) $\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta\, v_\theta}{\partial\theta}$

$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(V_0\cos\theta\left(r^2 - \frac{3}{2}Rr + \frac{R^3}{2r}\right)\right)$

$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V_0\sin^2\theta\left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right)\right)$

$= V_0\cos\theta\left[\frac{2}{r} - \frac{3R}{2r^2} \frac{R^3}{2r^4} - \frac{2}{r} + \frac{3R}{2r^2}\right.$

$\left. + \frac{R^3}{2r^4}\right] = 0$ ok.

+2"

b) Sur la sphère $\vec{v}(R,\theta,\varphi) = \ldots = \vec{0}$ ok.

c) $\lim\limits_{r\to+\infty} \vec{v}(r\,\theta\,\varphi) = V_0\cos\theta\,\vec{e_r} - V_0\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

$= V_0\vec{e_3}$ ok.

3) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} \neq \vec{0}$ car $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} \neq \vec{0}$

Rotationnel

Laminaire

Stationnaire

4) On a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \eta\,\Delta\vec{v}$

$= -\eta\,\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,v}$

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = +\frac{3V_0R}{2r^3}\eta\left(2\cos\theta\,\vec{e_r} + \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right)$

Selon $\vec{e_r}$: $\frac{\partial P}{\partial r} = \eta\frac{3V_0R}{\cancel{2}r^3}\cancel{2}\cos\theta$

$$P(r\ \theta) = -\frac{3}{2}\eta\frac{V_0 R}{r^2}\cos\theta + f(\theta)$$

Selon $\vec{e_\theta}$: $$\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = 3\eta\frac{V_0 R}{2 r^3}\sin\theta$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{3}{2}\eta\frac{V_0 R}{r^2}\sin\theta$$

$$P(r;\theta) = -\frac{3}{2}\eta\frac{V_0 R}{r^2}\cos\theta + A$$

$$\lim_{r\to+\infty} P(r,\theta) = P_0 = A$$

$$\boxed{P(r;\theta) = -\frac{3}{2}\eta\frac{V_0 R}{r^2}\cos\theta + P_0.}$$

$\boxed{5}$ $$\vec{F_p} = \oint\!\!\oint -P\,\vec{dS} = \underbrace{\oint\!\!\oint -P_0\,\vec{dS}}_{=0} + \oint\!\!\oint -\frac{3}{2}\eta\frac{RV_0}{r^2}\vec{dS}$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} +\frac{3}{2}\eta\frac{RV_0}{r^2}\cos\theta \,.\, r\,d\theta \,.\, r\sin\theta\, d\varphi\ \vec{e_r}$$

$$F_{p_z} = \vec{F_p}\cdot\vec{e_z}$$

$$= \frac{3}{2}\eta\frac{RV_0}{R^2}R^2\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 3\pi\eta RV_0\,\frac{2}{3} = 2\pi\eta RV_0.$$

15

$$\boxed{\vec{F_p} = 2\pi\eta RV_0\vec{e_z}}$$

6. $d\vec{F}_{vis} = -3\eta \frac{V_0 R \sin^2\theta}{2} d\theta\, d\varphi\, \vec{e_\theta}$

On a

$$dS = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad \text{et} \quad d\vec{F}_{vis} = \eta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} dS\, \vec{e_\theta}$$

$$v_\theta (R,\theta,\varphi) = -V_0 \sin\theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r}(R;\theta;\varphi) = -V_0 \sin\theta \left(+\frac{3}{4R} + \frac{3}{4R}\right)$$

$$= -V_0 \sin\theta\, \frac{3}{2} R.$$

$$\boxed{d\vec{F}_{vis} = \eta \frac{\partial v_\theta}{\partial r}(R,\theta,\varphi) dS\, \vec{e_\theta}}$$

OK.

7 – $\vec{F}_{vis} = \oiint d\vec{F}_{vis}$

$$= -\frac{3}{2}\eta V_0 R \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi\, \vec{e_\theta}$$

$$\vec{F}_{vis}\cdot\vec{e_3} = \frac{3}{2}\eta V_0 R\, 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta$$

$$= 2\eta V_0 R\, 2\pi.$$

$$\boxed{\vec{F}_{vis} = 4\pi\eta R V_0 \vec{e_3}}$$

7. $\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_{vis}$

$\underline{\vec{F} = 6\pi\eta R V_0 .\vec{e_3}}$ Stokes

Annexe 1. Droite de pente -1.

$\log C_x = -\log Re + cte$

Pour $C_x = 95$ $Re = 50$ $\rightarrow cte = 1{,}4$

$=$ 0)

$$C_x \simeq \frac{25}{Re} \quad (\text{ou } 24)$$

Soit $F = \frac{1}{2} C_x \mu V_0^2 \pi R^2$

et $C_x = \frac{25}{Re} = \frac{25}{2 R V_0 \mu} \eta$

$$F = \frac{25}{4} \cdot \frac{\cancel{\mu} \cancel{V_0^2} \pi R^{\cancel{2}}}{\cancel{R} \cancel{V_0} \cancel{\mu}} \eta$$

$$= \frac{25}{4} \eta \pi R V_0$$

$$\simeq 6 \pi \eta R V_0 \quad \text{ok.}$$

8| Chute libre d'une sphère de rayon $R = 0,50$ cm

<u>Bilan des forces</u>

- le poids $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V \vec{g}$
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A = -\mu' V \vec{g}$
- la force de traînée
  $\vec{F} = -6\pi\eta' R \vec{v}$ pour $Re < 1$

<u>Loi de la quantité de mouvement</u>

$$m \frac{dv}{dt} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{\Pi}_A \qquad m = \rho \cdot \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{V}$$

Selon $\vec{e_z}$ $\quad m \frac{dv}{dt} = -6\pi\eta' R \vec{v} + (\rho V - \mu' V) g$

$\downarrow \vec{e_z}$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta' R}{\rho \frac{4}{3} \pi R^3} \cdot v = \left(1 - \frac{\mu'}{\rho}\right) g$$

$$\boxed{\tau = \frac{2 \rho R^2}{9 \eta'}} \qquad \boxed{v_{lim} = \tau \left(1 - \frac{\mu'}{\rho}\right) g}$$

On veut $Re < 1$

Soit $\dfrac{\rho' 2R v_{lim}}{\eta'} < 1$.

$$\frac{\rho' 2R}{\eta'} \frac{2\rho R^2}{9\eta'}\left(1-\frac{\rho'}{\rho}\right)g < 1.$$

$$\boxed{R < \sqrt[3]{\frac{9\eta'^2}{4\rho'(\rho-\rho')g}}}$$

2a $\underline{R < 5,4 \text{ mm}}$.