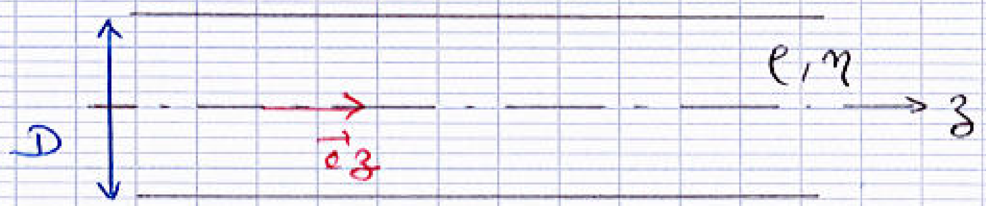
15

28' CCP
PSI 2012

Ecoulements d'eau

I _ Etude d'une canalisation domestique



1| Régime permanent : $\vec{v}$ ne dépend pas de t
* et $\vec{g}$ négligé.

La conduite est invariante par toute rotation autour de son axe* $\Rightarrow$ $\vec{v}$ ne dépend pas de θ
L'écoulement se fait selon la conduite $\Rightarrow$ $\vec{v}$ est dirigé par $\vec{e_z}$.

D'où $\vec{v}(M,t) = v(r,z)\vec{e_z}$

2| Equation de conservation de la masse

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{régime permanent})$$

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = \rho \operatorname{div} \vec{v} = \rho \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Donc $\vec{v}$ ne dépend pas de z.

3| Equation de Navier Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \eta \Delta \vec{v}$$

22

③ $\left(\vec{v}(r)\cdot \overrightarrow{grad}\right)\left(v(r)\vec{e_z}\right)$

$$= v(r)\frac{\partial}{\partial z}\left(v(r)\vec{e_z}\right)$$

$$= \vec{0}$$

$\frac{\partial z}{\partial z}$.

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ régime permanent

et $\Delta \vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\vec{e_z}$

Navier Stokes $\vec{0} = -\overrightarrow{grad}\, P + \eta \Delta \vec{v}$

Selon $\vec{e_r}$ $\boxed{0 = -\frac{\partial P}{\partial r}}$ P ne dépend pas de r.

Selon $\vec{e_\theta}$ $0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$ P ne dépend pas de θ.

Selon $\vec{e_z}$ $0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)$ avec $v(r)$

Soit $\boxed{\underbrace{\frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)}_{\text{ne dépend pas de } z} = +\underbrace{\frac{dP}{dz}}_{}}$ $\Rightarrow = K$.

4. On a $\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = \frac{K}{\eta} r$

Soit $r\frac{dv}{dr} = \frac{K}{\eta}\frac{r^2}{2} + A$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{K}{\eta}\frac{r}{2} + \frac{A}{r}$$

$v(r) = \frac{K}{\eta}\frac{r^2}{4} + A\ln r + B$

32

Or $v(r)$ est finie $\Rightarrow A = 0$ (pour $r=0$).

De plus $v\left(\frac{D}{2}\right) = 0 = \frac{k}{\eta} \frac{D^2}{16} + B$.

Soit $\boxed{v(r) = \frac{k}{4\eta}\left(r^2 - \frac{D^2}{4}\right)}$

$k < 0$ pour $v > 0$

35 5]. Q_v = débit volumique

Par définition

$$dQ_v = \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

débit volumique élémentaire à travers dS.

$$= v(r)\, dr\, r\, d\theta$$

$$Q_v = 2\pi \int_0^{D/2} v(r)\, r\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{D/2} \frac{k}{4\eta}\left(r^2 - \frac{D^2}{4}\right) r\, dr$$

$$= \frac{\pi k}{2\eta}\left[\frac{r^4}{4} - \frac{D^2}{4} \cdot \frac{r^2}{2}\right]_0^{D/2}$$

$$= \frac{\pi k}{8\eta}\left[\frac{D^4}{2^4} - D^2 \cdot \frac{D^2}{8}\right]$$

$$\boxed{Q_v = -\frac{\pi k D^4}{8\eta \cdot 16}}$$

38. 6]. La vitesse est maximale pour $r = 0$

on a $v_0 = -\frac{k D^2}{16\eta}$ $\boxed{v_0 = \frac{Q_v}{D^2}\frac{8}{\pi}}$

40

7] Re est le rapport entre l'accélération convective fois ρ et les forces volumiques de viscosité.

$$Re = \frac{U L}{\eta} \rho \qquad \text{avec } U = \frac{4 \Phi_v}{\pi D^2}$$

$$L = D$$

$$Re = \frac{4 \Phi_v D \rho}{\eta \pi D^2}$$

$$\boxed{Re = 4 \rho \frac{\Phi_v}{\eta \pi D}}$$

8] AN. On a $Re_c = 2300$.

$$\Phi_{v,max} = \frac{\eta \pi D Re_c}{4 \rho} \qquad \Phi_{v\,max} = 1{,}5\,6^{-4}\ m^3 s^{-1}$$

$$= 0{,}15\ L\,s^{-1}$$

$$v_{0\,max} = 0{,}16\ m\,s^{-1}$$

45.

15'

01 CCP PSI 2012 -

II Ecoulement dans 1 canal, mesure de débit -

1) Au vu des lignes de courant (plus elles sont resserrées, plus l'intensité de la vitesse est grande) On a

$$\underline{V(J) > V(C) > V(A) > V(K)}$$

05

2) $v_A = 0,5 \, m s^{-1}$. Par définition du débit volumique :

$$\boxed{\Phi_V = L_1 \, h \, v_A} \qquad \underline{\Phi_V = 0,125 \, m^3 s^{-1}}$$

L'écoulement étant incompressible, il y a conservation du débit volumique. On a alors

$$\Phi_V = L_2 \, h v_C = \frac{2}{3} L_1 v_C h , \quad \boxed{v_C = \frac{3}{2} v_A}$$

$$\underline{v_C = 0,75 \, m s^{-1}}$$

homogène

3) Ecoulement stationnaire incompressible d'un fluide parfait dans le champ de pesanteur

$$\boxed{\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = cte} \text{ le long d'une ligne de courant -}$$

4) Le point M est un point d'arrêt $v(M) = 0$ (le fluide dans le tube est au repos).

Bernoulli Entre 1 point A loin et M.

$$\frac{1}{2} \rho U^2 + \rho g z_A + P(A) = 0 + \rho g z_M + P(M)$$

Entre 1 point B loin et N

$$\frac{1}{2} \rho U^2 + \rho g z_B + P(B) = \frac{1}{2} \rho U^2 + \rho g z_N + P(N)$$

$z_A = z_M$ $\quad$ $z_B = z_N$

$$\Delta P = P(M) - P(N) = \frac{1}{2}\rho U^2$$

d'où $\quad \boxed{U = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}}$

5) Fluide dense de masse volumique ρ_0 au repos.

D'après la loi de l'hydrostatique

$$\boxed{P(M) = P(N) + \rho_0 g h}$$

$$\Leftrightarrow \Delta P = \rho_0 g h$$

12 6) On en déduit $\quad \boxed{U = \sqrt{\frac{2\rho_0 g h}{\rho}}}$

7) $Re = \frac{L_1 U_A \rho}{\eta}$

$Re = 1,5 \cdot 10^5$

20.

$Re \gg Re_c$ → turbulent invalide

ou $Re \gg 1$ → on peut négliger la viscosité, ok fluide parfait → validité.