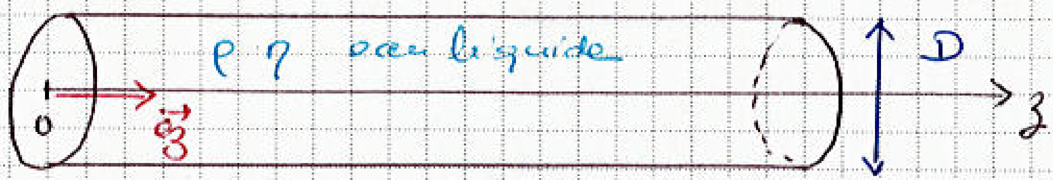
00

N°

Etude d'une canalisation domestique

Ecoulement incompressible laminaire stationnaire



01 **1)** A priori $\vec{v}(r\ \theta\ z\ t)$ en repère cylindrique

Ecoulement permanent $\rightarrow$ $\vec{v}$ ne dépend pas du temps

Effet de pesanteur négligé $\oplus$ tube cylindrique - le système est invariant par toute rotation autour de Oz $\rightarrow$ $\vec{v}$ ne dépend pas de θ

L'axe du tube est Oz $\vec{v}$ est dirigé selon Oz

D'où $\boxed{\vec{v}(M,t) = v(r;z)\,\vec{e_z}}$

04 **2)** Equation locale de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{v} = 0$$

En régime stationnaire $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. De plus ρ est uniforme. Il vient

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Soit $\boxed{\frac{\partial v}{\partial z} = 0}$ v ne dépend pas de z

$$\vec{v} = v(r)\,\vec{e_z}.$$

07

N°

3] Equation de Navier Stokes :

$$\rho \Big[\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{=\vec{0}} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \Big] = -\overrightarrow{grad}\, P + \eta \Delta \vec{v}$$

a)

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{v} = v(r) \frac{\partial}{\partial z} \left(v(r) \vec{e_z} \right) = \vec{0}$$

Il vient $\quad \overrightarrow{grad}\, P = \eta \Delta \vec{v}$

avec $\quad \overrightarrow{grad}\, P = \dfrac{\partial P}{\partial r} \vec{e_r} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial P}{\partial \theta} \vec{e_\theta} + \dfrac{\partial P}{\partial z} \vec{e_z}$

et $\quad \Delta \vec{v} = \Delta \left(v(r) \vec{e_z} \right) = \left(\Delta v(r) \right) \vec{e_z}$

$$= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{e_z}$$

Il vient $\quad \boxed{\dfrac{\partial P}{\partial r} = 0} \quad$ P ne dépend pas de r

$\dfrac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad$ P ne dépend pas de θ

b)

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \eta \underbrace{\left[\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right]}_{\text{Ne dépend que de } r} = \underbrace{\frac{dP}{dz}}_{\text{Ne dépend que de } z}$$

De plus $\quad \dfrac{d}{dr} \left(r \dfrac{dv}{dr} \right) = \dfrac{dv}{dr} + r \dfrac{d^2 v}{dr^2}$

Soit $\quad \boxed{\dfrac{\eta}{r} \dfrac{d}{dr} \left(r \dfrac{dv}{dr} \right) = K .}$

14

4] On a $\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = \frac{k}{\eta} r$

Soit $r\frac{dv}{dr} = \frac{kr^2}{2\eta} + A$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{kr}{2\eta} + \frac{A}{r}$$

$$v(r) = \frac{1}{2}\frac{kr^2}{2\eta} + A\ln r + B$$

Or $v(0)$ est finie $\Rightarrow A = 0$

$v\left(\frac{D}{2}\right) = 0$ le fluide visqueux adhère à la paroi

$$\frac{1}{16}\frac{kD^2}{\eta} = -B$$

$$\boxed{v(r) = \frac{k}{16\eta}\left[4r^2 - D^2\right]}$$

$v > 0 \Rightarrow k < 0$

19

5] Φ_v = débit volumique
= flux de $\vec{v}$ à travers une section du tube

$$= \iint \vec{v}(M)\cdot \vec{dS_M}$$

$$= \iint v(r)\, r\,d\theta\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{D/2} \frac{k}{16\eta}(4r^2 - D^2)\, r\,dr$$

$$= \frac{2\pi k}{16\eta}\left[\frac{4r^4}{4} - \frac{D^2 r^2}{2}\right]_0^{D/2}$$

$$Q_v = \frac{2\pi k}{16\eta}\left(\frac{D^4}{16} - \frac{D^4}{8}\right)$$

$$\boxed{Q_v = -\frac{2\pi k}{16^2\eta} D^4}$$

6) v est maximale pour $r = 0$

$$v(r) = -\frac{k}{16\eta}\left(D^2 - 4r^2\right)$$

$$v_0 = v(0) = \frac{-k D^2}{16\eta}$$

On a $Q_v = -\frac{k}{16\eta} \frac{2\pi}{16} D^4$

$$= +v_0 \frac{2\pi}{16} D^2$$

$$\boxed{v_0 = \frac{8 Q_v}{\pi D^2}}$$

15 7) Par définition $R_e = \frac{\rho \|\vec{v}.\overrightarrow{grad}\,\vec{v}\|}{\eta \|\Delta \vec{v}\|}$

$\rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}$ = ρ x accélération convective

$\eta\|\vec{v}\|$ = force de viscosité par u de volume

$R_e = \frac{\rho U L}{\eta}$ avec $U = \frac{4 Q_v}{\pi D^2}$

$L = D$

Soit $R_e = \frac{\rho}{\eta} \frac{4 Q_v}{\pi D^2} \times D$

$$\boxed{R_e = \frac{\rho}{\eta} \frac{4 Q_v}{\pi D}}$$

28 N°

8) AN - Pour que l'écoulement de l'eau soit laminaire il faut $Re < Re_c$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{\eta} \frac{4 Q_V}{\pi D} < Re_c$$

$$Q_{V max} = \eta \frac{\pi Re_c D}{4\rho}$$

$$Q_{V max} = 1,5.10^{-4}\ m^3 s^{-1}$$
$$= 0,55\ m^3 h^{-1} \quad \text{ou } 553\ L\,h^{-1}$$

$$v_{0 max} = 0,16\ m s^{-1}$$

Avec le débit maximal l'écoulement est turbulent –

34