Meilleure note :

Moyenne :

Écart-type :

Première partie

Écoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère

I – Préliminaires

1\) $\vec{v}(M,t) = v(y,t)\,\vec{e_x}$

$$\boxed{\vec{F}_{\substack{vis\\1\to2}} = -\eta \frac{\partial v}{\partial y}\,\vec{e_x}\cdot S}$$

2\) Σ = particule P_2

En y $\quad \vec{F}_{visc}(y) = -\eta \dfrac{\partial v(y)}{\partial y} S\,\vec{e_x}$

En $y+dy$ $\quad \vec{F}_{vis}(y+dy) = +\eta \dfrac{\partial v(y+dy)}{\partial y} S\,\vec{e_x}$

$$\vec{F}_{visc\,tot} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y)\,\underbrace{dy\,S}_{dV}\,\vec{e_x}$$

$$\vec{f}_v = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,\vec{e_x}$$

$$\vec{f}_{vis} = \eta\,\Delta\vec{v}$$

3\) Σ = particule de fluide

Réf terrestre galiléen

Bilan des forces

forces pressantes $\quad \vec{f}_p = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P$

forces de cisaillement $\quad \vec{f}_{cis} = \eta\,\Delta\vec{v}$

Loi de la quantité de mouvement

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \eta \Delta \vec{v}}$$

II - Écoulement autour d'une sphère

1) On veut $D_0 = \rho^{\alpha} \eta^{\beta} V_0^{\gamma}$

avec $[\rho] = M L^{-3}$

$[V_0] = L T^{-1}$

$$[\eta] = \frac{[\text{force}]}{L\,[\text{vitesse}]} = \frac{M L T^{-2}}{L^2 T^{-1}} = M L^{-1} T^{-1}$$

D'où
$$0 = \alpha + \beta$$
$$1 = -3\alpha - \beta + \gamma$$
$$0 = -\beta - \gamma$$

$\Rightarrow$ $\beta = -\alpha$

$\gamma = -\beta = +\alpha$

$1 = -3\alpha + \alpha + \alpha = -\alpha$

$\alpha = -1$; $\gamma = -1$; $\beta = 1$.

$$\boxed{D_0 = \frac{\eta}{\rho V_0}}$$

2) On a $Re = \dfrac{\rho L U}{\eta}$

$$= \rho \frac{D V_0}{\eta}$$

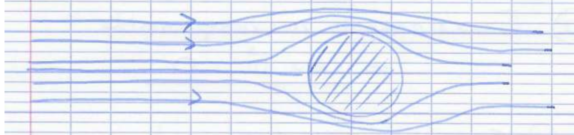
$$\boxed{Re = \frac{D}{D_0}}$$

3) $Re_1 = 7{,}2 \cdot 10^{2 \text{ ou } 5}$ pour $R = 0{,}50$ cm.

Écoulement turbulent.

$Re_2 = 7{,}2 \cdot 10^{-4 \text{ ou } -1}$ pour $R = 0{,}50$ µm.

L'écoulement est laminaire



$\vec{e_3}$

4) Situation invariante par rotation autour de l'axe $Oz \rightarrow \vec{F}$ selon $\vec{e_3}$

5) $C_x = \dfrac{F}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 \pi R^2}$

$$[C_x] = \frac{[\text{force}]}{M L^{-3}\, L^2 T^{-2}\, L^2} = \frac{M L T^{-2}}{M L^1 T^{-2}} = 1$$

C_x est sans dimension.

C_x ne dépend que d'un nombre sans dimension Re.

6] Pour $Re < 1$ C_x décroît linéairement avec Re (pente -1 en échelle log - log)

Pour $Re \in [700 ; 3 \cdot 10^5]$ C_x ne dépend pas de Re $C_x = 0,5$.

7]. On a $\vec{F} \simeq 0,4 \times \frac{1}{2} \rho \pi R^2 V_0^2 \vec{e_3}$

$\vec{F} = 0,2 \rho \pi R^2 V_0^2 \vec{e_3}$ forme quadratique.

III Etablissement de la formule de Stokes

1. a) Ecoulement incompressible

$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$

b) Présence de la sphère fixe dans le référentiel d'étude

$\vec{v}(R, \theta, \varphi) = \vec{0}$

Condition d'adhérence

c) Dans les régions éloignées

$\lim_{R \to +\infty} \vec{v}(r, \theta, \varphi) = V_0 \vec{e_3}$

d) $\vec{0} = -\vec{\operatorname{grad}} P + \eta \Delta \vec{v}$

2] a) $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \sin\theta\, v_\theta}{\partial \theta}$

$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(V_0 \cos\theta \left(r^2 - \frac{3}{2} R r + \frac{R^3}{2r}\right)\right)$

$- \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(V_0 \sin^2\theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right)\right)$

$= V_0 \cos\theta \left[\frac{2}{r} - \frac{3R}{2r^2} - \frac{R^3}{2r^4} - \frac{2}{r} + \frac{3R}{2r^2} + \frac{R^3}{2r^4}\right] = 0$ ok.

b) Sur la sphère $\vec{v}(R, \theta, \varphi) = \dots = \vec{0}$ ok

c) $\lim_{r \to +\infty} \vec{v}(r, \theta, \varphi) = V_0 \cos\theta\, \vec{e_r} - V_0 \sin\theta\, \vec{e_\theta}$

$= V_0 \vec{e_3}$ ok.

3] $\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{v} \neq \vec{0}$ car $\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{v} \neq \vec{0}$

Rotationnel

Laminaire

Stationnaire

4] On a $\vec{\operatorname{grad}} P = \eta \Delta \vec{v}$

$= -\eta\, \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{v}$

$\vec{\operatorname{grad}} P = + \frac{3 V_0 R}{2 r^3} \eta \left(2 \cos\theta\, \vec{e_r} + \sin\theta\, \vec{e_\theta}\right)$

Selon $\vec{e_r}$: $\frac{\partial P}{\partial r} = \eta \frac{3 V_0 R}{\cancel{2} r^3} \cancel{2} \cos\theta$

$$P(r,\theta) = -\frac{3}{2}\eta\frac{V_0 R}{r^2}\cos\theta + f(\theta)$$

Selon $\vec{e_\theta}$: $\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{3}{2}\eta\frac{V_0 R}{r^3}\sin\theta$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{3}{2}\eta\frac{V_0 R}{r^2}\sin\theta$$

$$P(r;\theta) = -\frac{3}{2}\eta\frac{V_0 R}{r^2}\cos\theta + A$$

$$\lim_{r\to+\infty} P(r,\theta) = P_0 = A$$

$$\boxed{P(r;\theta) = -\frac{3}{2}\eta\frac{V_0 R}{r^2}\cos\theta + P_0.}$$

5. $\vec{F_p} = \oiint -P\,\vec{dS} = \underbrace{\oiint P_0\vec{dS}}_{=0} + \oiint -\frac{3}{2}\eta\frac{RV_0}{r^2}\vec{dS}$

$$= \int_{\theta=0}\int_{\varphi=0}^{2\pi} +\frac{3}{2}\eta\frac{RV_0}{r^2}\cos\theta \; r\,d\theta\,.\,r\sin\theta\,d\varphi\;\vec{e_r}$$

$$F_{p_3} = \vec{F_p}\cdot\vec{e_3}$$

$$= \frac{3}{2}\eta\frac{RV_0}{R^2}R^2\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$= 3\pi\eta RV_0\,\frac{2}{3} = 2\pi\eta RV_0.$$

15

$$\boxed{\vec{F_p} = 2\pi\eta RV_0\vec{e_3}}$$

6. $\vec{dF_{cis}} = -3\eta\frac{V_0 R\sin^2\theta}{2}\,d\theta\,d\varphi\,\vec{e_\theta}$

$$S = R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$v_\theta(R,\theta,\varphi) = -V_0\sin\theta\left(1-\frac{3R}{4r}-\frac{R^3}{4r^3}\right)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r}(R;\theta;\varphi) = -V_0\sin\theta\left(+\frac{3}{4R}+\frac{3}{4R}\right)$$

$$= -V_0\sin\theta\,\frac{3}{2}R.$$

$$\vec{dF_{cis}} = \eta\frac{\partial v_\theta}{\partial r}(R,\theta,\varphi)\,S\,\vec{e_\theta} \quad \text{ok.}$$

7. $\vec{F_{cis}} = \oiint \vec{dF_{cis}}$

$$= -\frac{3}{2}\eta V_0 R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\,d\varphi\,\vec{e_\theta}$$

$$\vec{F_{cis}}\cdot\vec{e_3} = \frac{3}{2}\eta V_0 R\,2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta$$

$$= 2\eta V_0 R\,2\pi.$$

$$\boxed{\vec{F_{cis}} = 4\pi\eta RV_0\vec{e_3}}$$

7. $\vec{F} = \vec{F_p} + \vec{F_{cis}}$

$\underline{\vec{F} = 6\pi\eta RV_0.\vec{e_3}}$ Stokes

Annexe 1. Droite de pente -1.

$\log C_x = -\log R_e + \text{cte}$

Pour $C_x = 0{,}5$ $R_e = 50$ $\to$ cte $= 1{,}4$

$C_x \simeq \dfrac{25}{R_e}$ (ou 24)

Soit $F = \frac{1}{2} C_x \mu V_0^2 \pi R^2$

et $C_x = \dfrac{25}{R_e} = \dfrac{25}{2RV_0\mu}\eta$

$$F = \frac{25}{4}\cdot\frac{\mu V_0^2 \pi R^2}{\cancel{R}\cancel{V_0}\cancel{\mu}}\eta$$

$$= \frac{25}{4}\eta \pi R V_0$$

$$\simeq 6\pi\eta R V_0 \quad \text{ok.}$$

8. Chute libre d'une sphère de rayon $R = 0{,}50$ cm

Bilan des forces

- le poids $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V \vec{g}$
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A = -\mu' V \vec{g}$
- la force de traînée $\vec{F} = -6\pi\eta' R\vec{v}$ pour $Re < 1$

Loi de la quantité de mouvement

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{\Pi}_A$$

Selon $\vec{e}_z$

$$m\frac{dv}{dt} = -6\pi\eta' R v + (\rho V - \mu' V) g$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta' R}{\rho\frac{4}{3}\pi R^3} v = \left(1 - \frac{\mu'}{\rho}\right) g$$

$$\tau = \frac{2\rho R^2}{9\eta'} \qquad v_{lim} = \tau\left(1 - \frac{\mu'}{\rho}\right) g$$

On veut $Re < 1$

Soit $\dfrac{\mu' 2R v_{lim}}{\eta'} < 1$.

$$\frac{\mu' 2R}{\eta'}\frac{2\rho R^2}{9\eta'}\left(1 - \frac{\mu'}{\rho}\right) g < 1.$$

$$\boxed{R < \sqrt[3]{\frac{9\eta'^2}{4\mu'(\rho - \mu')g}}}$$

$R < 5{,}4$ mm

Deuxième partie

A memristor is a pipe whose diameter varies

Extrait de Mines-Ponts 2017 Physique 1 PC

A. Modélisation d'un écoulement

1. On reconnaît un écoulement de Poiseuille.
   - L'écoulement est **stationnaire** donc $\vec{v}$ ne dépend pas du temps t,
   - Le système est **invariant par toute rotation** autour de l'axe des z (les effets de la pesanteur sont négligeables) donc $\vec{v}$ ne dépend pas de θ.

— L'écoulement se fait selon le tuyau donc selon $\overrightarrow{e_z}$

Le champ des vitesses est de la forme : $\boxed{\overrightarrow{v} = v(r,z)\overrightarrow{e_z}}$

2. Équation locale de conservation de la masse :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} \mu \overrightarrow{v} = 0}$$

On a un écoulement sationnaire homogène et incompressible, il vient $\operatorname{div} \overrightarrow{v} = 0$, soit $\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$. v **ne dépend pas de** z. On a donc $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{e_z}$

3. D'après l'équation de Navier Stokes :

$$\mu\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(\overrightarrow{v})\right) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,P + \eta\Delta\overrightarrow{v}$$

L'accélération locale est nulle : $\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \vec{0}$.

L'accélération convective est également nulle : $\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\right)\overrightarrow{v} = \left(v.\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit (c.f. formulaire pour l'expression des opérateurs en cylindrique) :

$$\begin{aligned}
\rho\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} &= -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(P) + \eta\Delta\overrightarrow{v}\\
\overrightarrow{0} &= -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(P) + \eta\Delta\overrightarrow{v}\\
&= -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(P) + \eta\left(\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right)\overrightarrow{u}_z\\
&= -\frac{\partial P}{\partial r}\overrightarrow{u}_r - \frac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{u}_z + \eta\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv(r)}{dr}\right)\overrightarrow{u}_z
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\left|\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial P}{\partial r}\\ 0 &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv(r)}{r}\right)\end{aligned}\right.}$

De la première équation on déduit que P ne dépend pas de r : $\boxed{P(r,z) = P(z)}$.

La deuxième équation devient donc :

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv(r)}{r}\right)$$

Le premier membre de l'égalité ne dépend que de z et le second membre ne dépend que de r. Les variables r et z étant séparées, ces deux termes sont égaux à une même constante K. On a donc

$$\frac{dP}{dz} = K$$

$P(z) = Kz + K'$ avec les conditions aux limites $P(0) = P_e$ et $P(\ell) = P_s$.

$$\boxed{P(z) = \frac{P_s - P_e}{\ell}z + P_e}$$

Et on a bien

$$\frac{\eta}{r}\left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv(r)}{r}\right)\right] = K$$

avec $\boxed{K = \dfrac{P_s - P_e}{\ell}}$

4. On a $\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv(r)}{r}\right) = \dfrac{K}{\eta}r$.

Soit $r\dfrac{dv(r)}{r} = \dfrac{K}{2\eta}r^2 + K_1$

$\dfrac{dv(r)}{r} = \dfrac{K}{2\eta}r + \dfrac{K_1}{r}$

Or $v(r)$ ne peut diverger en $r = 0$ donc $K_1 = 0$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\frac{dv(r)}{r} &= \frac{K}{2\eta}r\\
v(r) &= \frac{K}{4\eta}r^2 + K_2 \qquad \text{avec la C.L. } v(a) = 0\\
K_2 &= -\frac{K}{4\eta}a^2
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{v(r) = \frac{P_e - P_s}{4\eta\ell}.\left(a^2 - r^2\right) = \frac{-K}{4\eta}\left(a^2 - r^2\right)}$$

On obtient un profil de vitesse parabolique.

La vitesse est positive si K est négatif, ce qui est le cas.

5. Le débit volumique du fluide qui traverse le tuyau correspond au flux de la vitesse à travers une section. Il s'écrit :

$$\begin{aligned} D_{vol} &= \iint \overrightarrow{v}(r).d\overrightarrow{S} \text{avec} d\overrightarrow{S} = dr.rd\theta\overrightarrow{e_z} \\ &= \int_0^a v(r).2\pi r.dr \\ &= \frac{P_e - P_s}{4\eta\ell}.2\pi \int_0^a \left(ra^2 - r^3\right) dr \\ &= \frac{P_e - P_s}{2\eta\ell}.\pi.\left[\frac{r^2a^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a \end{aligned}$$

Soit
$$\boxed{D_{vol} = \frac{\pi a^4}{8\eta\ell}\left(P_e - P_s\right) = -\frac{K\pi a^4}{8\eta}}$$

6. La vitesse est maximale pour $r = 0$. On a $v(0) = -\frac{Ka^2}{4\eta} = v_0$ avec $-\frac{K}{\eta} = \frac{8D_{vol}}{\pi a^4}$. On obtient :
$$\boxed{v_0 = \frac{2D_{vol}}{\pi a^2}}$$

7. Par définition le nombre de Reynols est le rapport entre l'accélération convective multipliée par la masse volumique du fluide et l'équivalent volumique des forces de viscosité.

On a $Re = \frac{\rho UL}{\eta}$ avec $L = 2a$ et $U = \frac{D_{vol}}{\pi a^2}$. On en déduit
$$\boxed{Re = \frac{2\rho D_{vol}}{\pi\eta a}}$$

B. Résistance hydraulique

8. La loi de Poiseuille montre que le débit volumique varie linéairement en fonction de la différence de pression amont-aval. Cette loi est donc analogue à la loi d'Ohm. On obtient une loi analogue en introduisant la notion de résistance thermique en **diffusion thermique**.

V	P	T
I	D_{vol}	Φ
$V_2 - V_1 = RI$	$P_2 - P_1 = R_{hyd}D_{vol}$	$T_2 - T_1 = R_{th}\Phi$

9. L'expression précédente du débit volumique s'écrit en introduisant la résistance hydraulique :
$$\begin{aligned} D_{vol} &= \frac{\pi a^4}{8\eta\ell}\left(P_e - P_s\right) \\ &= \frac{1}{R_{hyd}}.\left(P_e - P_s\right) \end{aligned}$$

Soit
$$\boxed{R_{hyd} = \frac{8\eta\ell}{\pi a^4}}$$

Troisième partie

Débitmètres pour eaux usées

Extrait de Centrale Supelec PC 2015

A. Déversoir à seuil mince en canal ouvert

1. (a) Le débit volumique étant le même en amont de la pelle et à l'abscisse de la pelle, on a

$$v_1 h = \int_H^h v_2(z)dz < v_{2,max}(H-h)$$

On en déduit que

$$v_{2,max} > \frac{h}{H-h}v_1 \text{ or } \quad H-h \ll h \text{ donc } \quad \gg v_1$$

(b) En supposant l'écoulement irrotationnel et stationnaire, l'équation d'Euler se réduit à

$$\rho(\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\, v^2) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(P+\rho g z)$$

La somme $P + \dfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z$ est donc uniforme ; en écrivant sa valeur aux points M_1 et M_2, on obtient

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g(h-H) = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2(z) + \rho g z$$

soit

$$v_2^2 = v_1^2 + 2g(h-z)$$

ce qui conduit à

$$v_2 = \sqrt{2g(h-z)}$$

en négligeant v_1^2 ; notons que ce résultat n'est manifestement pas correct pour $z \simeq h$.

2. Le débit volumique est le flux de $\overrightarrow{v_2}$ à travers la section de fluide au-dessus de la pelle, soit

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{h-H} \sqrt{2g(h-z)}Bdz \\ &= B\sqrt{2g}\int_0^{h-H} u^{1/2}du \\ &= B\sqrt{2g}\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_0^{h-H} \\ &= \frac{2}{3}B\sqrt{2g}\,(h-H)^{3/2} \end{aligned}$$

On obtient le résultat de l'énoncé en posant

$$A = \frac{2}{3}B\sqrt{2g}$$

3. L'onde parcourt la distance $2(h_s - h)$; la durée Δt d'un aller-retour est donc telle que

$$2(h_s - h) = c\Delta t \text{ soit } h = h_s - \frac{c\Delta t}{2}$$

La célérité du son dépendant de la température, il faut connaître T pour déterminer h.

B. Jaugeur Venturi en canal ouvert

1. (a) Nous avons montré que, pour un écoulement irrotationnel et stationnaire, la somme $P + \dfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z$ est uniforme ; soit P_1 sa valeur. En un point de la surface libre, la pression est P_0 et $z = h(x)$, donc

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2(x) + \rho g h(x) = P_0 + \rho g H(x)$$

On en déduit que

$$H(x) = \frac{P_1 - P_0}{2g}$$

La charge spécifique est donc uniforme.

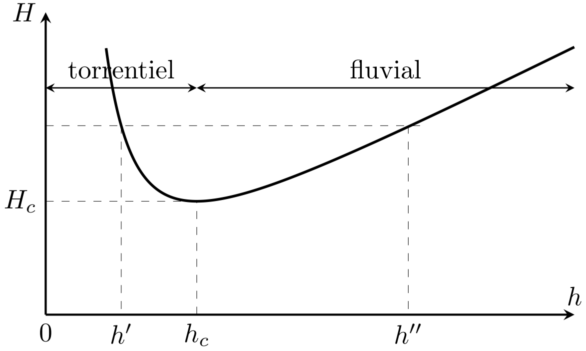
(b) Le débit a pour expression

$$Q = v(x)h(x)B$$

On en déduit l'expression de la charge :

$$H = h(x) + \frac{Q^2}{2gBh^2(x)}$$

Pour une valeur donnée de Q, la variation de la charge en fonction de la hauteur est représentée par la courbe ci-dessous



(c) La valeur h_c de h séparant le régime torrentiel du régime fluvial est celle qui annule la dérivée $\dfrac{dH}{dh}$, soit

$$h_c = \left(\frac{Q^2}{gB^2}\right)^{1/3}$$

La vitesse correspondante est

$$v_c = \frac{Q}{Bh_c} = \left(\frac{gQ}{B}\right)^{1/3}$$

La charge spécifique correspondante est

$$H_c = h_c + \frac{v_c^2}{2g} = h_c + \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{gB^2}\right)^{1/3} = \frac{3}{2}h_c$$

Au voisinage du régime critique, la dérivée $\dfrac{dH}{dh}$ est, en valeur absolue, très petite devant l'unité ; il en résulte que $\left|\dfrac{dh}{dH}\right| \gg 1$. Ainsi, une petite variation de la charge provoque une grande variation de la hauteur de la surface libre.

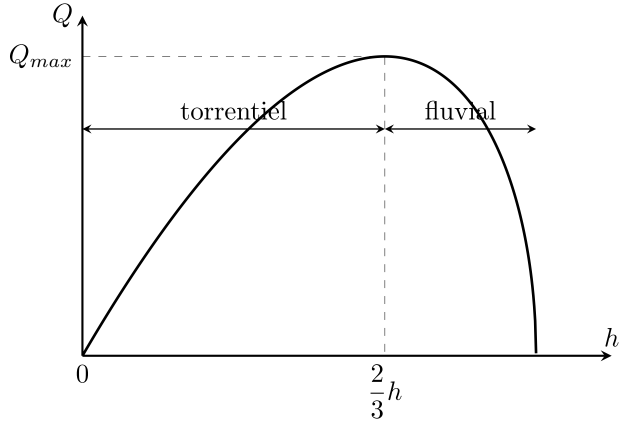
(d) Le débit est

$$Q = Bhv \text{ avec } v = \sqrt{2g(H-h)}$$

soit

$$Q = Bhv\sqrt{2g(H-h)}$$

L'allure de la courbe est la suivante



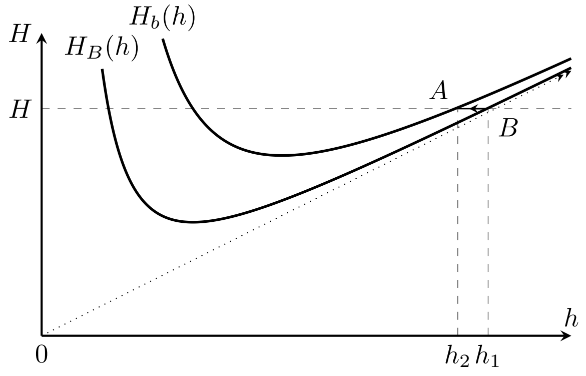
Le débit est maximal pour $\dfrac{dQ}{dh} = 0$ soit pour $h = \dfrac{2}{3}H$; on retrouve le même rapport $\dfrac{h}{H}$ que dans le régime critique étudié à la question précédente. Le régime torrentiel correspond à $h < \dfrac{2}{3}H$ et le régime fluvial correspond à $h > \dfrac{2}{3}H$.

2. (a) Le canal d'approche permet d'avoir un écoulement en régime fluvial et parfaitement calibré en amont du canal de mesure.

(b) Le débit volumique est le flux de la vitesse à travers une section du canal, soit

$$Q = Bv_1h_1 = bv_2(x)h_2(x)$$

(c) *cas du jaugeur noyé —*



h_1 est la solution de l'équation $H_B(h) = Q$ dans le domaine fluvial et h_2 est la solution de l'équation $H_b(h) = Q$ dans le domaine fluvial.

Dans le convergent, la transformation est représentée par le segment AB où A a pour coordonnées (h_1, H) et B a pour coordonnées (h_2, H).

Dans ce cas, on a $h_2 - h_1 < 0$; la conservation de la charge s'écrit

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} \text{ soit } v_2^2 - v_1^2 = 2g(h_1 - h_2)$$

On en déduit que $v_2 > v_1$; dans l'approximation $v_2 \gg v_1$, la vitesse v_2 est

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

On en déduit le débit volumique

$$Q = bh_2 v_2 = bh_2\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

(d) *cas du jaugeur dénoyé* — Il y a passage au régime critique dans le canal de mesure ; la charge y est donc égale à

$$H_c = \frac{3}{2}\left(\frac{Q^2}{gb^2}\right)^{1/3}$$

La charge en amont est

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} \simeq h_1$$

En supposant qu'il y a conservation de la charge dans le convergent, on en déduit que

$$h_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{Q^2}{gb^2}\right)^{1/3}$$

soit

$$Q = b\sqrt{\frac{8}{27}gh_1^3}$$

Numériquement, on vérifie que

$$\sqrt{\frac{8}{27}} \simeq 0,544$$

ce qui conduit à un résultat en accord avec l'énoncé. Pour $h_1 = 50$ cm et $Q = 1000$ m^3.h^{-1} $= 0,278$ m^3.s^{-1}, on obtient $b = 0,46$ m.

Si b est trop petit, le nombre de Reynolds n'est plus suffisamment grand pour que les effets de la viscosité restent négligeables.

(e) Un jaugeur noyé nécessite la mesure de $h_2 - h_1$, mesure délicate car les courbes sont très près de leur asymptote. En revanche, un jaugeur dénoyé ne nécessite que la mesure de h_1.

Quatrième partie

Physique du skimboard

Extrait de Centrale-Supélec PC 2011

I Calcul de la résultante des forces pressantes s'exerçant sur la planche

A. Résultats préliminaires

Q1- Prenons comme système l'eau sous la planche entre l'abscisse x et l'abscisse x_T. Les échanges de ce système ouvert avec l'extérieur s'effectuent à travers la surface $S(x)$ d'abscisse x et d'aire $Lh(x)$ et la surface S_T d'abscisse x_T et d'aire Lh_T. Le débit massique entrant par $S(x)$ est $+\rho Lh(x)v(x)$ et le débit massique sortant par S_T est $\rho Lh_T V$. L'écoulement étant stationnaire, la masse d'eau entre x et x_T est indépendante du temps ; on a donc $\rho Lh(x)v(x) = \rho Lh_T V$ soit

$$\boxed{h(x)v(x) = h_T V}$$

Q2- L'équation locale de conservation de la masse s'écrit de façon générale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

soit, puisque ρ est uniforme et indépendante du temps :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0}$$

Soit $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0$. En supposant $\vec{v} = v(x)\vec{u_x}$, on a $v'(x) = 0$, soit à $\boxed{v(x) = V}$ en intégrant.

Cette relation est en contradiction avec la relation précédente : le paradoxe provient du fait que $|v_z| \ll |v_x|$ n'implique pas que $\left|\dfrac{\partial v_z}{\partial z}\right| \ll \left|\dfrac{\partial v_x}{\partial x}\right|$. On peut donc avoir une divergence nulle, même avec un champ des vitesses d'expression approchée $\vec{v} = v(x)\vec{u_x}$ avec $v'(x) \neq 0$.

Q3- Dans le cadre de ce modèle $\vec{v} = v(x)\vec{u_x}$, alors $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \vec{0}$ on peut supposer l'écoulement irrotationnel.

Q4- L'écoulement est permanent, incompressible et irrotationnel et on néglige l'influrance de la pesanteur. Le théorème de Bernoulli indique que la grandeur $p + \dfrac{1}{2}\rho v^2$ est uniforme dans tout le fluide. On le démontre à partir de l'équation d'Euler qui se réduit, en négligeant les forces de pesanteur :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v^2 - \vec{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p$$

L'écoulement étant irrotationnel et stationnaire, et ρ étant uniforme, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(p + \frac{1}{2}\rho v^2\right) = \vec{0}$$

B. Calcul direct

Q5- Soit x désignant l'abscisse d'un point situé sur la surface mouillée de la planche, le théorème de Bernoulli nous donne

$$p(x) + \frac{1}{2}\rho v(x)^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2$$

or $v(x) = V\dfrac{h_T}{h(x)}$ donc

$$\boxed{p(x) - p_0 = \frac{1}{2}\rho V^2\left[1 - \frac{h_T^2}{h^2(x)}\right]}$$

Q6- Géométriquement, on a $\tan\alpha = \dfrac{h(x) - h_T}{x_T - x}$, soit

$$\boxed{h(x) = h_T + (x_T - x)\tan\alpha}$$

Remarque : l'angle α est supposé petit : $\tan\alpha \simeq \alpha$.

Q7- On suppose que la pression de l'eau au contact de la surface non mouillée de la planche est p_0. La résultante totale des forces de pression $\vec{F}$ que les fluides exercent sur la planche possède deux composantes : $\vec{F} = F_x\vec{u_x} + F_z\vec{u_z}$.
Pour $x < x_A$, la pression de l'eau est égale à la pression de l'air. Les forces pressantes se compensent. Pour $x \in [x_A, x_T]$, la différence de pression entre l'air sur la face supérieure et l'eau sur la face inférieure crée une force $F\vec{n}$, où $\vec{n} = \sin\alpha\vec{u_x} + \cos\alpha\vec{u_z}$ est le vecteur unitaire normal à la plaque orienté de l'eau vers l'air. On obtient F par intégration sur la surface mouillée, soit

$$\begin{aligned}
F &= \int_{x_A}^{x_T}(p(x) - p_0)L\,dx \\
&= L\int_{x_A}^{x_T}\frac{1}{2}\rho V^2\left[1 - \frac{h_T^2}{h^2(x)}\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\rho V^2 L\int_{x_A}^{x_T}\left[1 - \left(\frac{h_T}{h_T + (x_T - x)\tan\alpha}\right)^2\right]dx
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\left(\frac{h_T}{h_T + (x_T - x)\tan\alpha}\right)^2 &= \left(1 + \tan\alpha\frac{x_T - x}{h_T}\right)^{-2} \\
&\simeq 1 - 2\alpha\frac{x_T - x}{h_T}
\end{aligned}$$

soit, en reportant dans l'intégrale précédente

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}\rho V^2 L \int_{x_A}^{x_T} 2\alpha \frac{x_T - x}{h_T} dx \\
&= \frac{1}{2}\rho V^2 L \frac{2\alpha}{h_T} \int_{x_A}^{x_T} (x_T - x) dx \\
&= \frac{1}{2}\rho V^2 L \frac{2\alpha}{h_T} \left[x_T x - \frac{x^2}{2} \right]_{x_A}^{x_T} \\
&= \frac{1}{2}\rho V^2 L \frac{2\alpha}{h_T} \left[x_T(x_T - x_A) - \frac{x_T^2 - x_A^2}{2} \right] \\
&= \frac{1}{2}\rho V^2 L \frac{\alpha}{h_T} (x_T - x_A)^2
\end{aligned}$$

Dans le cadre des faibles valeurs de l'angle α, on a

$$(x_T - x_A)^2 \simeq \ell^2$$

et

$$\frac{\alpha}{h_T} \simeq \frac{\sin\alpha}{h_T} = \frac{h_A - h_T}{h_T \ell_m} \simeq \frac{h_A - h_T}{h_A \ell_m}$$

On obtient

$$F = \frac{\rho V^2}{2} L \ell_m \left(1 - \frac{h_T}{h_A} \right)$$

puis $F_z = F\cos\alpha \simeq F$ de la forme

$$\boxed{F_z = \frac{\rho V^2}{2} L \ell_m (1 - \lambda)}$$

avec $\boxed{\lambda = \frac{h_T}{h_A}}$.

Enfin, on a $\boxed{F_x = F\sin\alpha \simeq \frac{\alpha \rho V^2}{2} L \ell_m (1 - \lambda)}$

Q8- Soit T un point situé à l'arrière de la planche. Le moment des forces de pression par rapport à T est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \int_{x_A}^{x_T} \overrightarrow{TM} \wedge d\overrightarrow{F}(M)$$

où $\overrightarrow{TM} = -(x_T - x)\overrightarrow{u_x} + \tan\alpha (x_T - x)\overrightarrow{u_z}$ et $d\overrightarrow{F} = (p(x) - p_0) L dx \overrightarrow{n} = \frac{1}{2}\rho V^2 L \left[1 - \frac{h_T^2}{h^2(x)} \right] dx \overrightarrow{n}$ est la somme des forces de pressantes s'exerçant sur la bande $[x, x + dx]$, soit

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathcal{M}} &= \frac{1}{2}\rho V^2 L \int_{x_A}^{x_T} (x - x_T) \left[1 - \frac{h_T^2}{h^2(x)} \right] \frac{1}{\cos\alpha} \overrightarrow{u_y} \\
&\simeq -\frac{1}{2}\rho V^2 L \int_{x_A}^{x_T} (x - x_T) \left[1 - \frac{h_T^2}{h^2(x)} \right] \overrightarrow{u_y}
\end{aligned}$$

Le moment par rapport à l'axe $(T; \overrightarrow{u_y})$ est

$$\mathcal{M} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{u_y} = K \int_{x_A}^{x_T} (x_T - x) \left[1 - \frac{h_T^2}{h^2(x)} \right] dx$$

avec

$$K = \frac{1}{2}\rho V^2 L$$

Q9- Pour que le sportif soit à l'équilibre dans R, il doit se positionner à la distance ℓ_p de l'axe $(T; \overrightarrow{u_y})$, de sorte que la somme des moments des efforts sur la planche soit nulle, soit

$$M = \ell_p m g \text{ ce qui détermine } \boxed{\ell_p = \frac{1}{4mg} \rho V^2 L \ell_m f(\lambda)}$$

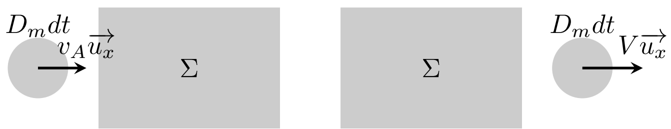
C. Calcul par un bilan de quantité de mouvement

Q10- En choisissant comme système fermé Σ, l'eau contenue dans le volume situé sous la planche entre les abscisses x_A et x_T et celle qui va pénétrer dans ce volume entre les dates t et $t + dt$, on a

$$P_x(\Sigma) = P_0 + D_m dt v_A \qquad \text{à la date } t$$

et

$$P_x(\Sigma) = P_0 + D_m dt V \qquad \text{à la date } t + dt$$



Système à la date t Système à la date $t + dt$

On en déduit que

$$\left.\frac{dP_x(\Sigma)}{dt}\right|_R = D_m(V - v_A) = \rho L h_T V(V - \lambda V)$$

$$\boxed{\left.\frac{dP_x(\Sigma)}{dt}\right|_R = \rho L h_T V^2(1-\lambda)}$$

Q11- On note p_A la pression en $x = x_A$: $p_A = p(x_A)$. Σ est soumis aux forces horizontales

— $F_A = p_A h_A L$ de la part du fluide d'abscisse inférieure à x_A ;
— $F_T = -p_0 h_T L$ de la part du fluide d'abscisse supérieure à x_T ;
— F'_x de la part de la planche.

La force $\overrightarrow{F}$ exercée par les fluides sur la planche est

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{F'} + \overrightarrow{F}_{air\to planche} + \overrightarrow{F}_{jet\to planche}$$

$\overrightarrow{F}_{jet\to planche}$ est compensée par la force exercée par l'air sur l'aire correspondante de la face supérieure de la planche puisque les pressions sont égales à p_0 de part et d'autre. Il reste donc la force exercée par l'air sur la partie mouillée de la planche, soit

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{F'} + p_0 L\ell_m(-\overrightarrow{n})$$

En projection sur $\overrightarrow{u_x}$, on obtient

$$\begin{aligned} F_x &= -F'_x - p_0 L\ell_m \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u_x} \\ &= -F'_x - p_0 L\ell_m \sin\alpha \\ &= -F'_x - p_0 L(h_A - h_T) \end{aligned}$$

La somme des forces horizontales sur Σ est finalement

$$F_A + F_T - F'_x = p_A h_A L - p_0 h_T L - F_x - p_0 L(h_A - h_T)$$

$$\boxed{F_A + F_T - F'_x = h_A L(p_A - p_0) - F_x}$$

Q12- On applique le théorème de la résultante cinétique au système Σ ; en projection sur $\overrightarrow{u_x}$, on obtient

$$\left.\frac{dP_x(\Sigma)}{dt}\right|_R = h_A L(p_A - p_0) - F_x$$

soit

$$\rho L h_T V^2(1-\lambda) = h_A L(p_A - p_0) - F_x$$

or

$$p_A - p_0 = \frac{1}{2}\rho V^2(1-\lambda^2)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{2}\rho V^2 L\left[(1-\lambda^2)h_A - 2(1-\lambda)h_T\right] \\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 L h_A\left[(1-\lambda^2) - 2\lambda(1-\lambda)\right] \\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 L h_A(1-\lambda)\left[1+\lambda-2\lambda\right] \\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 L h_A(1-\lambda)^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 L(h_A - h_T)(1-\lambda) \\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 L\ell_m \sin\alpha(1-\lambda) \end{aligned}$$

Dans le cas des petits angles, $\sin\alpha \simeq \alpha$ donc

$$F_x \simeq \frac{1}{2}\rho V^2 L\ell_m\alpha(1-\lambda)$$

On retrouve les résultats obtenus par la méthode précédente.

II Mouvement de la planche dans le référentiel terrestre

Q13- Le théorème de la résultante cinétique (système sportif et planche dans le référentiel de la plage galiléen de vitesse $\overrightarrow{V} = -V\overrightarrow{u}_x$) s'écrit

$$\begin{cases} -m\dfrac{dV}{dt} = F_x \\ 0 = F_z - mg \end{cases}$$

Dans l'approximation des petits angles, on a $F_x \simeq F\alpha$ et $F_z \simeq F$, soit

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = -g\alpha}$$

Q14- On suppose h_T connu.

(a) Avec

$$1-\lambda = \frac{h_A - h_T}{h_A} \simeq \frac{\ell_m \alpha}{h_A} \simeq \frac{\ell_m \alpha}{h_T}$$

l'équation $F_z = mg$ devient

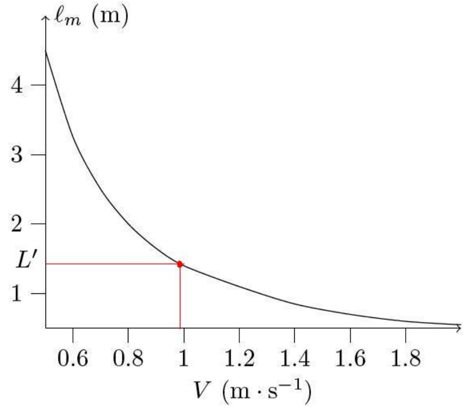
$$\frac{1}{2}\rho V^2 L \frac{\ell_m^2 \alpha}{h_T} = mg$$

On en déduit

$$\boxed{\ell_m = \sqrt{\frac{2mgh_T}{\rho V^2 L \alpha}}}$$

(b) Si l'angle α est constant, il est nécessaire que la vitesse V dépasse une valeur minimale pour que ℓ_m soit inférieure à la longueur de la planche.

(c) La largeur de la planche est $L = 70$ cm, sa longueur $L' = 1,40$ m. Le skimboard a été lancé avec une vitesse initiale $V(t=0) = 2,7$ m.s^{-1} et faisait un angle constant pratiquement égal à $\alpha = 2,0^o$. On a tracé figure 3 la courbe $\ell_m(V, \alpha = 2,0^o)$ avec les paramètres du problème ($m = 35$ kg, $g = 10 m.s^{-2}$, $h_T = 2,0$ cm, $\rho = 1,0 \times 10^3$ kg.m^{-3}).



Graphiquement, on peut estimer la vitesse minimale à $V_1 = 1$ m.s^{-1}. Si l'angle α est constant, la vitesse varie selon la loi

$$V(t) = V_0 - g\alpha t$$

La vitesse minimale est atteinte à la date t_1 telle que

$$V_1 = V_0 - g\alpha t_1 \text{ soit } t_1 = \frac{V_0 - V_1}{g\alpha}$$

La distance parcourue à la date t est

$$d(t) = V_0 t - \frac{1}{2} g\alpha t^2$$

soit, à la date t_1

$$\begin{aligned} d_1 &= V_0 t_1 - \frac{1}{2} g\alpha t_1^2 \\ &= \frac{V_0 - V_1}{g\alpha}\left(V_0 - \frac{1}{2}(V_0 - V_1)\right) \\ &= \frac{(V_0 - V_1)(V_0 + V_1)}{2g\alpha} \end{aligned}$$

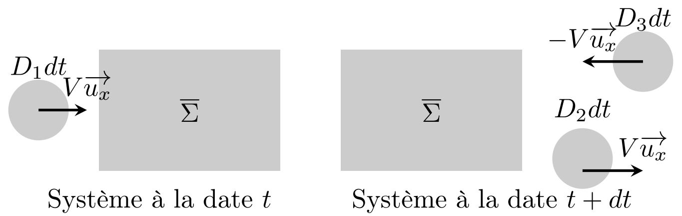
Numériquement [1], on obtient

$$d_1 = 9,4 \text{ m}.$$

Q15- Le modèle néglige la poussée d'Archimède et la viscosité.

III Nécessité du jet d'eau

Q16- En choisissant, comme système fermé $\overline{\Sigma}$, l'eau contenue dans le volume hachuré figure 4 et celle qui va pénétrer dans ce volume entre les dates t et $t + dt$, le débit massique entrant est $D_1 = \rho V L(h_T + \delta)$ et les débits massiques sortants sont $D_2 = \rho V L h_T$ et $D_3 = \rho V L \delta$.



on a

$$P_x(\overline{\Sigma}) = P_0 + D_1 dt V \qquad \text{à la date } t$$

et

$$P_x(\overline{\Sigma}) = P_0 + (D_2 - D_3) dt V \qquad \text{à la date } t + dt$$

soit

$$\left.\frac{dP_x(\overline{\Sigma})}{dt}\right|_R = V(D_2 - D_1 - D_3) = -2\rho L V^2 \delta$$

1. attention à exprimer α en radians !

Q17- On applique le théorème de la résultante cinétique au système $\overline{\Sigma}$; en projection sur $\overrightarrow{u_x}$, on obtient, comme la pression est uniforme et égale à p_0 sur les frontières fluides :

$$\left.\frac{dP_x(\overline{\Sigma})}{dt}\right|_R = -F_x$$

soit

$$F_x = 2\rho L V^2 \delta$$

et

$$F_z \simeq \frac{F_x}{\alpha} = \frac{2\rho L V^2 \delta}{\alpha}$$

α étant petit, on peut ainsi avoir une grande valeur de F_z.

Q18- En utilisant les données numériques de la question Q14 pour une vitesse $V = 2$ m.s^{-1}, on obtient

$$\delta \simeq \frac{mg\alpha}{2\rho L V^2} \simeq 2 \text{ mm}$$