Ondes EM dans le vide

Applications directes du cours

1. Déterminer la longueur d'onde λ, le nombre d'onde σ en cm^{-1} et la norme du vecteur d'onde k pour une station grande onde (de fréquence $\nu = 250$ kHz), une station FM (de fréquence $\nu = 100$ MHz) et pour un téléphone portable (de fréquence $\nu = 1,8$ GHz).
2. Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon $R = 1,0$ mm d'une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632,8$ nm. La puissance moyenne émise est $P_e = 1,0$ mW. On donne : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H.m^{-1}. Calculer les amplitudes E_{max} du champ électrique et B_{max} du champ magnétique.
3. Déterminer la direction de propagation et l'état de polarisation des OPPM suivantes :

$$\overrightarrow{E_1} = \left| \begin{array}{c} 0 \\ E_0\cos(\omega t + kx) \\ 0 \end{array} \right. ; \overrightarrow{E_2} = \left| \begin{array}{c} -E_0\sin(\omega t + kz) \\ E_0\cos(\omega t + kz) \\ 0 \end{array} \right. ; \overrightarrow{E_3} = \left| \begin{array}{c} E_0\cos(\omega t - ky) \\ 0 \\ -E_0\sin(\omega t - ky + \frac{\pi}{6}) \end{array} \right. ; \overrightarrow{E_4} = \left| \begin{array}{c} 0 \\ E_0\cos(\omega t - kx) \\ E_0\sin(\omega t - kx) \end{array} \right. .$$

4. Écrire les expressions de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ (éventuellement complexes) :
   - d'une OEMPPM se propageant selon $\overrightarrow{u_y}$ et polarisée rectilignement selon Oz,
   - d'une OEMPPM se propageant selon $\overrightarrow{u_x}$ et polarisée rectilignement à 45^o de l'axe Oy,
   - d'une OEMPPM polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{u_x}$ et se propageant à 45^o de l'axe Oy,
   - d'une OEMPPM se propageant selon $-\overrightarrow{u_x}$ et polarisée circulairement droite,
   - d'une OEMPPM se propageant selon $\overrightarrow{u_z}$ et polarisée circulairement gauche.

Exercices

1. Puissance d'un laser

Un laser de puissance moyenne d'émission $P = 2\,\text{mW}$ émet un faisceau lumineux supposé cylindrique selon l'axe Ox, de rayon $r = 0,75\,\text{mm}$. L'onde lumineuse est monochromatique ($\lambda = 632,5\,\text{nm}$) et on l'assimile à une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement. On note $c = 3\cdot 10^8\,\text{m.s}^{-1}$ la célérité de l'onde.

1. Exprimer et calculer la pulsation ω pour l'onde.
2. Proposer une écriture du champ $\overrightarrow{E}$ associé à cette onde, en notant E_0 son amplitude.
3. En déduire l'expression du champ $\overrightarrow{B}$, en fonction de E_0 et c.
4. Exprimer le flux du vecteur de Poynting associé au faisceau. Donner sa valeur moyenne P_{moy}.
5. Dans la dualité onde-corpuscule de l'approche quantique, on associe des photons à l'onde lumineuse. Déterminer le flux Φ de photons associé à ce faisceau LASER ainsi que n le nombre de photons par unité de volume dans le faisceau.

2. États de polarisation

Décrire la direction de propagation et l'état de polarisation des ondes suivantes et représenter l'évolution de la direction de $\overrightarrow{E}$ dans le plan de polarisation.

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_0.\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_y} + \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_0.\cos(\omega t + kx)\overrightarrow{e_y} + E_0\cos(\omega t + kx + \frac{\pi}{2})\overrightarrow{e_z} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_0.\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_y} + \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kx - \frac{\pi}{2})\overrightarrow{e_z} \qquad (3)$$

3. Câble coaxial

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs cylindriques de même axe Oz. Le premier est un conducteur massif de rayon R_1, appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur $R_2 > R_1$ et de rayon extérieur R_3, appelé la gaine du conducteur.

On considère le câble comme infini suivant l'axe Oz. Une onde électromagnétique se propage à l'intérieur du câble dans la région $R_1 < r < R_2$, constituée d'un isolant mais qu'on assimilera à du vide du point de vue de ses propriétés électromagnétique. Cette onde est définie en notation complexe par son champ électrique :

$$\overrightarrow{\underline{E}}(r,z,t) = \frac{\alpha}{r}\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_r}$$

où α est une constante réelle positive.

1. L'onde est-elle plane ? Est-elle progressive ? Si oui, préciser sa direction de propagation.
2. On note E_0 l'amplitude maximale du champ électrique dans le câble coaxial. Préciser l'unité de E_0 et exprimer $\overrightarrow{\underline{E}}(r,z,t)$ en fonction de E_0, r, z, t, k et R_1.
3. À partir des équations de Maxwell, retrouver l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique. En déduire la relation de dispersion liant k et ω. Le milieu est-il dispersif ?
4. Déterminer en fonction de E_0, r, t, ω, k et R_1, l'expression du champ magnétique complexe $\overrightarrow{\underline{B}}(r,z,t)$ associé à cette onde, à une composante permanente près (indépendant du temps). Justifier pourquoi on peut considérer cette composante comme nulle.
5. On désigne par $\overrightarrow{\Pi}$ le vecteur de Poynting associé à cette onde électromagnétique. Déterminer l'expression de $\overrightarrow{\Pi}$ en fonction de E_0, R_1, r, k, ω, z, t et μ_0.
6. Déterminer l'expression de la puissance moyenne transportée P, par le câble en fonction de E_0, R_1, R_2, c et μ_0. Application numérique : en déduire l'amplitude E_0 du champ électrique sachant que la puissance moyenne transportée est de 10 W. On prendra : $R_1 = 0,25\,\mathrm{mm}$ et $R_2 = 1,25\,\mathrm{mm}$.

Données : On donne les opérateurs en coordonnées cylindriques

$$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rA_r)}{\partial\,r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\,A_\theta}{\partial\,\theta} + \frac{\partial\,A_z}{\partial\,z}$$

et

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\,A_z}{\partial\,\theta} - \frac{\partial\,A_\theta}{\partial\,z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial\,A_r}{\partial\,z} - \frac{\partial\,A_z}{\partial\,r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\,(rA_\theta)}{\partial\,r} - \frac{\partial\,A_r}{\partial\,\theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

et

$$\Delta\overrightarrow{A} = \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2\,A_r}{\partial\,r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\,A_r}{\partial\,\theta^2} + \frac{\partial^2\,A_r}{\partial\,z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\,A_r}{\partial\,r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\,A_\theta}{\partial\,\theta} - \frac{A_r}{r^2}\right)\overrightarrow{e_r} \\ \left(\frac{\partial^2\,A_\theta}{\partial\,r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\,A_\theta}{\partial\,\theta^2} + \frac{\partial^2\,A_\theta}{\partial\,z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\,A_\theta}{\partial\,r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\,A_r}{\partial\,\theta} - \frac{A_\theta}{r^2}\right)\overrightarrow{e_\theta} \\ \left(\frac{\partial^2\,A_z}{\partial\,z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\,A_z}{\partial\,\theta^2} + \frac{\partial^2\,A_z}{\partial\,r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\,A_z}{\partial\,r}\right)\overrightarrow{e_z} \end{array}$$

4. Émission d'une station de radio

On considère une station de radio émettant sur une porteuse de fréquence $f = 92\,\mathrm{MHz}$ (FM). L'onde est réceptionnée à grande distance $d = 100\,\mathrm{km}$, à l'aide d'une antenne de type cadre carrée, de côté $a = 10\,\mathrm{cm}$ à $N = 1000$ spires. On admet que l'on peut supposer l'onde localement plane, de polarisation rectiligne selon la verticale.

1. Que vaut la longueur d'onde λ ? Que signifie ici être à grande distance de la source ?
2. Comment placer l'antenne de façon optimale pour maximiser la fem induite dans l'antenne ?
3. En supposant qu'au niveau de l'antenne émettrice, l'émission est isotrope en puissance, calculer la puissance nécessaire à l'émission pour obtenir une fem d'amplitude $E_0 = 0,1\,\mathrm{V}$ au niveau de la réception. Évaluer l'amplitude du champ électrique à la réception (distance d), puis tout près de l'émission (distance $d' = 10\,\mathrm{m}$).

5. Ondes planes stationnaires entre deux plans

On dispose dans le vide deux plans parfaitement conducteurs, parallèles, d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$. On se propose d'étudier une onde électromagnétique, stationnaire, plane, monochromatique, à polarisation rectiligne entre ces deux plans : $\overrightarrow{E} = E_0 f(x)\cos(\omega t)\overrightarrow{u_y}$.

1. En admettant que les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont nuls dans un métal parfaitement conducteur, écrire les conditions aux limites que doivent vérifier les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ dans le vide en $x = 0$ et $x = a$ par continuité de la composante tangentielle de $\overrightarrow{E}$ et normale de $\overrightarrow{B}$.
2. Déterminer la fonction $f(x)$ et montrer que la pulsation ω est nécessairement quantifiée.
3. Calculer le champ magnétique de cette onde.
4. Calculer l'énergie électrique $\mathscr{E}_e$ et l'énergie magnétique $\mathscr{E}_B$, emmagasinée dans un volume cylindrique d'axe $(0x)$, situé entre les deux plans et de section S.
   Montrer qu'il y a échange permanent entre énergie électrique et énergie magnétique.

6. Étude d'une onde électromagnétique

On considère l'onde électromagnétique se propageant dans le vide dont le champ électrique est :

$$\overrightarrow{E} = E_0 \cos\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\overrightarrow{e_x} + E_0' \cos\left[\omega\left(t - \frac{y}{c}\right) + \frac{2\pi}{3}\right]\overrightarrow{e_z}$$

1. Donner les caractéristiques de cette onde, en particulier sa polarisation.
2. Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ de l'onde.
3. (a) Calculer la puissance instantanée traversant une section S du plan $y = y_0$.
   (b) Calculer la valeur moyenne de cette puissance pour : $S = 0{,}2\ \text{m}^2$; $E_0 = 80$ V/m ; $E_0' = 60$ V/m.

7. Lames demi-onde et quart d'onde

On considère une lame cristalline limitée par les plans d'équations $z = 0$ et $z = e$. Cette lame est biréfringente ; on note n_x l'indice de réfraction relatif à la composante du champ selon le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_x}$ et n_y l'indice de réfraction relatif à la composante du champ selon le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_y}$. On suppose $n_y > n_x$.

1. On envoie sur cette lame une onde électromagnétique plane progressive polarisée rectilignement se propageant selon $\overrightarrow{e_z}$.
   (a) Donner l'expression générale du champ électrique $\overrightarrow{E}(z,t)$ de cette onde dans la région $z < 0$.
   (b) Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}(z,t)$ correspondant.
2. (a) Déterminer la polarisation de l'onde transmise dans la lame.
   (b) Préciser ce que l'on appelle une lame demi-onde, une lame quart d'onde.
3. (a) On envoie sur une lame demi-onde une onde polarisée rectilignement dont la direction de polarisation fait un angle θ avec l'axe rapide de la lame. Caractériser la polarisation de l'onde émergente.
   (b) On envoie sur une lame demi-onde une onde de polarisation circulaire droite. Déterminer la polarisation de l'onde émergente.
4. Montrer qu'une lame quart d'onde permet de produire une onde de polarisation circulaire droite à partir d'une onde incidente de polarisation rectiligne dont on précisera la direction de polarisation par rapport aux axes de la lame.

8. Laser : faisceau gaussien

Une onde plane étant d'extension infinie, elle ne peut représenter de manière réaliste le faisceau d'un laser dont la section S est en pratique inférieure au mm^2.
Dans un modèle plus réaliste, on considère l'onde électromagnétique émise dans le vide par un laser en $z = 0$. Cette onde se propage selon la direction $\overrightarrow{u_z}$ et peut être mise sous la forme suivante, dans la zone $z \geq 0$:

$$\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{E}(r,z)\exp[i(\omega t - kz)]\overrightarrow{u}_x,$$

avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, et en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) :

$$\underline{E}(r,z) = E_0 \frac{iz_0}{z + iz_0} \exp\left(-ik\frac{r^2}{2(z+iz_0)}\right),$$

où E_0 et z_0 sont des constantes positives (z_0 est appelée distance de Rayleigh).

1. Montrer que le carré du module de $\underline{E}$ se met sous la forme $|\underline{E}(r,z)|^2 = A^2(z)\exp\left(-\dfrac{2r^2}{w(z)^2}\right)$, avec $w(z) = w_0\sqrt{1+\dfrac{z^2}{z_0^2}}$.

   Déterminer la constante w_0, nommée *waist* en fonction de z_0 et λ.
2. Montrer que $w(z)A(z) = w_0E_0$.
3. Représenter le graphe de $w(z)$ pour $z \geq 0$.
4. Représenter le graphe du module $|\underline{E}(r,z)|$ du champ électrique en fonction de r pour $z = 0$, puis pour une valeur $z > 0$ fixée.
5. Quelle signification physique peut-on donner à $w(z)$ ainsi qu'au waist w_0 ?
6. Montrer que lorsque $z \gg z_0$, le faisceau laser a une forme de cône de sommet O et de demi-angle au sommet β, qui sera exprimé en fonction de w_0 et z_0, puis en fonction de w_0 et λ.
7. Calculer β en degrés pour un laser YAG-Nd^{3+} possédant pour caractéristiques $w_0 = 0,50$ mm et $\lambda = 1,1$ μm, puis pour un laser CO_2 de même waist mais de longueur d'onde 10 fois plus grande. Commenter.
8. Que dire du comportement du faisceau laser pour $z \ll z_0$?