Propagation dans les milieux linéaires

Applications directes du cours

$\boxed{1}$ On considère la propagation d'une OPPM transverse dans un plasma, que l'on décrit en notation complexe par $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{E_0}} \exp(i(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r}))$. On rappelle la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2}.$$

1. Cas où $\omega > \omega_P$.
   - (a) À partir des équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, donner la structure de l'OPPM électromagnétique dans le plasma, en faisant intervenir la vitesse de phase v_φ et la direction de propagation $\overrightarrow{u}$.
   - (b) Exprimer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à cette onde, ainsi que la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique.
   - (c) Exprimer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie cinétique des électrons (on prendra une densité particulaire n_0 pour les électrons de masse m_e et de charge $-e$) sous l'action de l'onde.
   En déduire la densité volumique moyenne d'énergie totale, puis la vitesse de propagation de cette énergie.
2. Cas où $\omega < \omega_P$
   - (a) D'après la relation de dispersion, le module d'onde est désormais imaginaire pur. Donner son expression dans le cas où la propagation se fait selon la direction $\overrightarrow{u_z}$. Quel signe faut-il choisir pour que l'onde obtenue ait un sens physique ? Exprimer le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ dans ce cas. Donner l'expression du champ électrique résultant et commenter sa forme mathématique.
   - (b) Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à une telle onde.

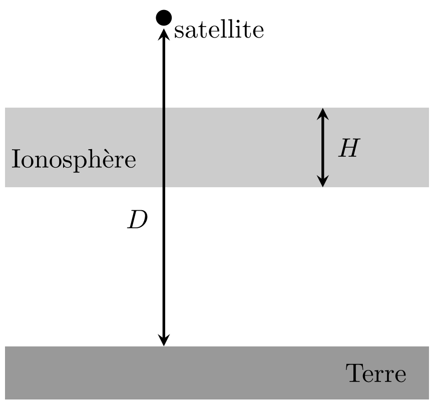
$\boxed{2}$ Une onde de basse fréquence se propage dans un conducteur réel de conductivité γ. Le champ électrique est $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \overrightarrow{u_x}$.

1. En utilisant une équation de Maxwell trouver l'expression du champ magnétique.
2. Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting, $\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle$.
3. Calculer la moyenne temporelle de la puissance volumique dissipée par effet Joule, $\langle P_{V,J} \rangle$.
4. Vérifier que $\text{div} \langle \overrightarrow{\Pi} \rangle + \langle P_{V,J} \rangle = 0$. Interpréter physiquement cette relation.

Exercices

1. Système GPS et ionosphère

Le système de localisation GPS (Global Positioning System) est si précis qu'il est nécessaire de prendre en compte la dispersion due à la traversée de l'ionosphère. L'ionosphère, d'épaisseur H, est un plasma globalement neutre : il contient des électrons de masse m, de charge $-e$ et de densité particulaire n, ainsi que des ions de masse M, de charge $+e$ et de densité particulaire n. On supposera que le plasma est suffisamment dilué pour considérer que ses éléments constitutifs ne sont pas en interaction.



1. On envisage une onde plane progressive monochromatique de la forme $\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}} \exp(i(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r}))$. Établir la relation de dispersion du plasma, ainsi que l'expression de la pulsation de coupure ω_P. Pourquoi la nomme-t-on ainsi ?
2. On envoie un train d'onde depuis un satellite vers la Terre. Donner l'expression de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe en fonction de la fréquence f de l'onde et de la fréquence plasma f_P. On suppose que l'atmosphère est assimilable à du vide vis-à-vis de l'onde envisagée. Calculer le temps τ que le train d'onde met pour parcourir la distance D qui sépare le satellite du sol. On supposera que $f \gg f_P$, ce qui permet un développement limité pour simplifier l'expression obtenue.
3. Pour prendre en compte la dispersion ionosphérique, on envoie deux trains d'onde de fréquences f_1 et f_2 et on mesure l'écart Δt entre leurs temps de parcours. Exprimer Δt lorsque $f_2 > f_1 \gg f_P$.
4. Montrer que $D = c\tau - d$, avec $d = \dfrac{f_1^2 f_2^2 c \Delta t}{f^2(f_2^2 - f_1^2)}$. On trouve que d est de l'ordre de quelques mètres. Commenter.

2. Étude énergétique de l'effet de peau

Un métal occupant le demi-espace $z > 0$ est caractérisé par une permittivité ϵ_0, une perméabilité μ_0 et une conductivité électrique γ. On se place dans le domaine de fréquences où le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

On étudie une situation pour laquelle il existe dans le métal un champ électrique de la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(z,t) = \overrightarrow{e_x} E_m \exp(-\alpha z) \exp\left[i(\alpha z - \omega t)\right]$$

où E_m est une amplitude réelle positive et où $\alpha = \sqrt{\dfrac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$

1. Préciser les expressions du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ et de la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ en tout point du métal.
2. (a) Quelle est l'expression de la puissance électromagnétique moyenne P_0 transmise en $z = 0$ à travers une surface S perpendiculaire à Oz ?
   (b) Quelle est l'expression de la puissance moyenne P_J dissipée par effet Joule dans le volume limité par un cylindre d'axe Oz, de surface de base S et qui s'étend de $z = 0$ jusqu'à l'infini ? Comparer ces deux puissances.
3. On peut retrouver la relation établie à la question précédente à l'aide d'un bilan énergétique. À cet effet :
   (a) Écrire l'identité intégrale de Poynting appliquée au volume V du cylindre d'axe Oz, de surface de base S et qui s'étend de $z = 0$ jusqu'à l'infini.
   (b) Si U_{em} est l'énergie électromagnétique contenue dans ce volume V, montrer que :
   $$\langle \frac{\mathrm{dU_{em}}}{\mathrm{dt}} \rangle_T = 0$$
   où $T = 2\pi/\omega$ est la période temporelle des grandeurs électromagnétiques de ce problème.
   (c) Retrouver alors la relation entre P_0 et P_J établie à la question 2.b).

3. Onde hertzienne dans l'eau de mer

On étudie la propagation d'ondes hertziennes dans l'eau de mer. On admet que l'eau est localement neutre ($\rho = 0$). Sa permittivité diélectrique relative $\varepsilon_r = 80$ et sa conductivité $\sigma = 6,23\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$ sont supposées réelles.

1. Quel est le domaine de fréquence des ondes hertziennes ? Donner les équations de Maxwell dans le milieu diélectrique (il suffit de remplacer ε_0 par $\varepsilon_0 \varepsilon_r$). Comment se situe la conductivité du cuivre comparée à celle de l'eau de mer ?
2. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique. On cherche une solution sous la forme $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{E_0}} \exp[i(\omega t - \underline{\vec{k}} \cdot \vec{r})]$.
3. Établir la relation de dispersion.
4. Déterminer la fréquence de coupure au-delà de laquelle il n'y a pas absorption. Quelle est la vitesse de phase dans ce cas ?
5. La fréquence d'une onde est $f = 100$ MHz. Déterminer l'expression de la pulsation spatiale k. Déterminer la distance caractéristique d'absorption de l'onde et sa vitesse de phase. Y a-t-il dispersion ? Pourquoi n'utilise-t-on pas d'ondes hertziennes pour les communications sous-marines ?

4. Transparence ultraviolette des métaux

Un métal est éclairé sous incidence normale par une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique. On adopte le modèle de conduction de Drude dans un métal : la force exercée par le réseau sur les électrons de conduction est de la forme $-\dfrac{m}{\tau}\vec{v}$. On note n^* le nombre volumique d'électrons libres.

Données : $n^* \simeq 10^{28}$ m^{-3}, $\gamma = 6 \cdot 10^8$ Ω.m^{-1}, $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et $\tau \simeq 10^{-14}$ s.

1. Montrer que le métal possède une conductivité complexe :
$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{n^* e^2 \tau}{m}$$
Quelle convention a été choisie pour la notation complexe du champ électrique pour obtenir cette expression ?
2. On rappelle que le métal est localement neutre. En déduire la relation de dispersion des pseudo-OPPH :
$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\underline{\sigma}\omega = \frac{\omega^2}{c^2} - i\frac{\mu_0\sigma_0\omega}{1 + i\omega\tau}$$
3. Dans l'ultra-violet : montrer que $\omega\tau \gg 1$ et interpréter le fait que certains métaux sont transparents dans l'UV.
4. Dans le visible : montrer qu'on a encore $\omega\tau \gg 1$ et interpréter le fait que les métaux bons conducteurs sont aussi des miroirs dans le visible.
5. Dans les micro-ondes et dans les grandes ondes : montrer que $\omega\tau \ll 1$ et interpréter le fait que les métaux bons conducteurs absorbent en partie les micro-ondes et les grandes ondes.

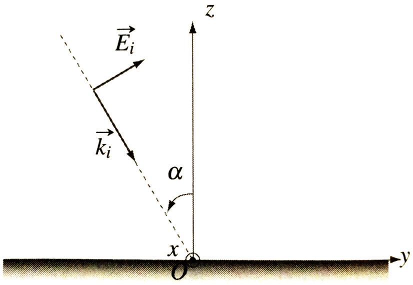
5. Couche anti-reflet

Une OPPS EM polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{u_y}$ de longueur d'onde dans le vide λ_0 se propage selon $+\overrightarrow{u_x}$ successivement dans trois milieux diélectriques transparents contigus séparés par deux dioptres plans transverses situés en $x = 0$ et $x = e$. Issue d'un milieu d'indice de réfraction n_1, elle entre en incidence normale dans une lame de verre d'indice n_2 d'épaisseur e, et ressort dans un milieu d'indice n_3. On suppose $n_3 \neq n_1$, et on prendra pour les AN $n_1 = 1,00$, $n_3 = 1,60$ et $\lambda_0 = 0,55\,\mu$m. Pour simplifier les calculs, on pourra faire usage des notations suivantes : $\varphi_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$; $r_{12} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$, $t_{12} = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}$, $r_{23} = \dfrac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}$ et $t_{23} = \dfrac{2n_2}{n_2 + n_3}$, ainsi que les autres coefficients obtenus en permutant les indices.

1. Première méthode :
   (a) Faire un schéma en représentant les OPPS en présence, puis écrire les champs électrique et magnétique dans chaque zone (1), (2), (3) en fonction de x, en introduisant si nécessaire une OPPS se propageant selon les x décroissant.
   On notera en particulier les amplitudes des ondes incidente, réfléchie vers (1) par la couche (2), et transmise vers (3) par la couche (2) respectivement $\overrightarrow{\underline{E_{0,i}}}$, $\overrightarrow{\underline{E_{0,r}}}$ et $\overrightarrow{\underline{E_{0,t}}}$. Exprimer les quatre conditions de continuité en fonction des amplitudes, des indices et de φ_0.
   (b) En déduire les coefficients de réflexion et de transmission par la couche (2) :
   $$\underline{r} = \frac{\underline{E_r}(t, x = 0^-)}{\underline{E_i}(t, x = 0^-)} \quad \text{et} \quad \underline{\tau} = \frac{\underline{E_t}(t, x = e^+)}{\underline{E_i}(t, x = 0^-)}$$
   puis les coefficients R et T de réflexion et transmission en puissance par la couche (2).
   (c) Établir la condition pour une absence d'onde réfléchie portant sur φ_0 et les indices. En déduire la valeur que doit prendre n_2 et les épaisseurs e possibles, en particulier l'épaisseur minimale e_{min}. Cela est-il réalisable ?
2. Deuxième méthode : On revient sur le calcul de $\underline{r}$ et $\underline{\tau}$ effectué en 1. par une seconde approche, qui permettra une interprétation physique de la condition de non réflexion. On considère que l'onde réfléchie est le résultat de la superposition d'une infinité d'ondes ayant toutes effectué un certain nombre (possiblement nul) d'aller-retours à l'intérieur de la couche (2) avant d'émerger dans (1).
   (a) Vérifier que $t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21} = 1$. À quelle propriété physique correspond cette relation ?
   (b) En utilisant ces coefficients et leurs propriétés ainsi que φ_0, exprimer l'amplitude $E_{0,r}$ de l'onde résultante réfléchie, et en déduire directement l'expression de $\underline{r}$. Appliquer la même approche pour exprimer $E_{0,t}$ et retrouver $\underline{\tau}$.
   (c) Interpréter physiquement la condition de non réflexion, et montrer qu'elle est aussi en faveur de la transmission.

6. Réflexion sur un métal sous incidence oblique

Une OPPM polarisée rectilignement, de pulsation ω, de vecteur d'onde $\vec{k_i}$ se propage dans le vide et arrive avec l'angle d'incidence $\alpha = (-\vec{u}_z, \vec{k_i})$ sur la surface d'un métal parfaitement conducteur qui occupe le demi-espace $z < 0$. $\vec{k_i}$ est contenu dans le plan (Oyz).



On suppose que le champ électrique de l'onde incidente est dans le plan d'incidence comme représenté sur la figure ci-dessus, sur laquelle il est représenté tel qu'il est à l'instant $t = 0$ au point O (les dimensions de la figure sont très inférieures à la longueur d'onde). Sa norme a alors une valeur maximale E_0.

1. Exprimer $\overrightarrow{E}_i(M, t)$.
2. Montrer qu'il doit exister une onde réfléchie. On admet qu'il s'agit d'une OPPM et que la direction de son vecteur d'onde k_r est donnée par la loi de Descartes de l'optique géométrique. Représenter $\vec{k}_r$.

   On utilise les relations de passage : $\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n_{1\to 2}}$; $\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}}$.
3. Montrer sans calcul que son champ électrique $\overrightarrow{E}_r$ est tel que $\|\overrightarrow{E}_r(O, t)\| = \|\overrightarrow{E}_i(O, t)\|$.
4. Représenter $\overrightarrow{E}_r$ et les champs magnétiques $\overrightarrow{B}_i$ et $\overrightarrow{B}_r$ des deux ondes tels qu'ils sont à $t = 0$ en O.
5. Exprimer $\overrightarrow{E}_r(M, t)$.

7. Pression de radiation - Voile solaire

Un métal de conductivité statique σ_0 occupe le demi-espace $x > 0$. Une OPPM EM de pulsation ω se propageant dans le vide selon x, incidente sur le métal sous incidence normale, donne lieu à une onde réfléchie et une onde transmise. On se place dans l'ARQS magnétique.

1. Après avoir rappelé la relation de dispersion dans le métal et défini son indice, déterminer les coefficients de réflexion et de transmission pour le champ électrique. On exprimera les résultats en fonction de ω, de $c = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$, et de l'épaisseur de peau δ. Qu'obtient-on à la limite du conducteur parfait ?
2. Déterminer la puissance dissipée par effet Joule P_J dans le métal par unité de surface en fonction des mêmes données et en fonction de la puissance surfacique incidente, sans passer par le calcul des courants. Donner une forme approchée sachant que la vitesse de phase vérifie $\delta\omega \ll c$.
3. On s'intéresse maintenant explicitement à l'effet des courants. En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, montrer que la pression moyenne $\langle P_R \rangle$ exercée par l'onde transmise sur le métal en raison des forces de Laplace est égale à la densité volumique d'énergie magnétique moyenne en $x = 0^+$.
4. En déduire, grâce à la question 1., que la pression de radiation vérifie

$$\langle P_R \rangle = \frac{4u_{em,i}\langle\rangle}{(1 + \frac{\delta\omega}{c})^2 + 1}$$

   où $\langle u_{em,i} \rangle$ est la densité volumique d'énergie électromagnétique incidente.
5. Que devient cette expression pour un métal parfait ? Retrouver cette expression par un raisonnement corpusculaire sur les photons. Comment serait alors modifiée cette pression en cas d'incidence oblique d'angle i ?
6. En déduire l'ordre de grandeur de la surface d'une voile solaire permettant de donner à une masse de 1 kg une accélération de 1 m.s^2 pour un vaisseau proche de la terre.