Propagation dans les milieux linéaires

I Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma peu dense

I.1 Interaction avec le plasma

a Modèle du plasma peu dense

b OPPM em transverse

On étudie la possibilité de propagation selon $\overrightarrow{u_z}$ d'une onde plane progressive monochromatique (OPPM) électromagnétique transverse.

En notation complexe : $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{E_0}} \exp\left[i(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r})\right]$, avec $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u_z}$ et $E_{0z} = 0$.

Relation de structure : $\underline{\overrightarrow{B}}(M,t) = \dfrac{k}{\omega}\left(\overrightarrow{u_z} \wedge \underline{\overrightarrow{E_0}}\right) \exp\left[i(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r})\right]$, $B_{0z} = 0$.

c Mouvement des charges

$$\boxed{m_e \frac{\partial \overrightarrow{v}(M,t)}{\partial t} = -e\overrightarrow{E}(M,t)}$$

d Conductivité complexe du plasma

On introduit $\overrightarrow{j}$ le vecteur densité de courant électrique et $\underline{\overrightarrow{j}}$ en notation complexe. On a :

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{j}}(M,t) = \underline{\gamma} \times \underline{\overrightarrow{E}}(M,t)}$$

avec $\boxed{\underline{\gamma} = -i\dfrac{n_0 e^2}{m_e \omega}}$ imaginaire pur.

I.2 Relation de dispersion

La relation de dispersion est la relation entre la pulsation ω et le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ d'une onde monochromatique.

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}}$$

- Si $\omega > \omega_P$ alors k est réel. L'OPPM se propage dans le plasma.
- Si $\omega < \omega_P$ alors k est imaginaire pur, $k = \pm\dfrac{i}{\delta}$ avec $\delta = \dfrac{c}{\sqrt{\omega_P^2 - \omega^2}}$.

On obtient une onde de la forme :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{E_0}\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t + \Phi\right)$$

On reconnaît une **onde évanescente** (onde stationnaire atténuée).

On a alors $\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \dfrac{i}{\delta\omega}\left(\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{\underline{E}}(M,t)\right)$. Le champ électrique et le champ magnétique vibrent en quadrature de phase. Par conséquent la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting est nulle.

Une onde évanescente ne transporte en moyenne aucune énergie électromagnétique.

I.3 Vitesse de phase

a Définition

On appelle **vitesse de phase** notée v_φ la vitesse de propagation d'une OPPM dans un milieu : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$.

b Dispersion

Lorsque le vitesse de phase dépend de la pulsation de l'OPPM, le milieu est dit **dispersif**.

c Cas du plasma

Dans un plasma une OPPM transverse se propage si $\omega > \omega_P$: $\boxed{v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_P^2}{\omega^2}}}}$

Un plasma peu dense est un milieu dispersif.

II Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique

On étudie la possibilité de propagation d'onde plane progressive monochromatique (OPPM) électromagnétique selon $\overrightarrow{u_z}$.

En notation complexe : $\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \overrightarrow{\underline{E_0}}\exp\left[i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})\right]$, avec $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u_z}$ et $E_{0z} = 0$.

Relation de structure : $\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \dfrac{k}{\omega}\left(\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{\underline{E_0}}\right)\exp\left[i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})\right]$, $B_{0z} = 0$.

II.1 Caractéristiques du milieu

On exploite le modèle de Drüde.
L'effet des collisions sur les électrons de conduction est modélisé par un force de frottement visqueux : $\overrightarrow{f} = -\dfrac{m_e}{\tau}\overrightarrow{v}$ avec τ temps caractéristique entre deux collisions (milieu dense).

Pour le cuivre $\tau \simeq 10^{-14}$ s.

Mouvement des électrons de conduction :

$$\boxed{m_e \frac{\partial \overrightarrow{v}(M,t)}{\partial t} = -\frac{m_e}{\tau}\overrightarrow{v}(M,t) - e\overrightarrow{E}(M,t)}$$

Avec les notations complexes : $\boxed{\underline{\overrightarrow{v}}(M,t) = -\frac{e\tau}{m_e} \cdot \frac{1}{1+i\;\omega\tau}\underline{\overrightarrow{E}}(M,t)}$

On note $\overrightarrow{j}(M,t)$ le vecteur densité de courant électrique.

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{j}}(M,t) = +\frac{n_0 e^2\tau}{m_e} \cdot \frac{1}{1+i\;\omega\tau}\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{\gamma} \times \underline{\overrightarrow{E}}(M,t), \text{ loi d'Ohm locale}}$$

On pose $\boxed{\underline{\gamma} = \gamma_0 \frac{1}{1+i\omega\tau} \quad \text{et} \quad \gamma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{m_e}, \text{ conductivité statique.}}$

II.2 Relation de dispersion

Hypothèses :

- $\omega\tau \ll 1$, $\underline{\gamma} = \gamma_0$, $\overrightarrow{j} = \gamma_0 \overrightarrow{E}$,
- La densité volumique de charge est nulle,
- OPPM em transverse.

Relation de dispersion : $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\gamma_0\mu_0, \; k \text{ est complexe!}}$

On peut poser : $\underline{k} = k' - ik"$ avec $k' = \Re e(\underline{k})$ et $k" = -\Im m(\underline{k})$.

On a alors $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{E_0}} \exp\left(-k"z\right)\exp\left(i(\omega t - k'z)\right)$. On reconnaît

- une partie propagative : $\exp\left(i(\omega t - k'z)\right)$ liée à la partie réelle de $\underline{k}$, dans le sens des z croissant si $k' > 0$,
- une partie atténuation du champ au cours de sa propgagation : le terme en $\exp\left(-k"z\right)$ liée à la partie imaginaire de $\underline{k}$.

II.3 Effet de peau

On se place dans le cadre des l'ARQS "magnétique" : on néglige le courant de déplacement devant le courant de conduction.

a Équations de Maxwell simplifiées

$$\boxed{\begin{array}{llll} \text{MG} & \operatorname{div} \overrightarrow{E} = 0 & \text{M}\Phi & \operatorname{div} \overrightarrow{B} = 0 \\ \text{MF} & \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} & \text{MA} & \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} \end{array}}$$

b Équation de propagation

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{E} = \mu_0\gamma_0\frac{\partial\,\overrightarrow{E}}{\partial\,t}}$$

c Relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0\omega\gamma_0$$

d Vitesse de phase, épaisseur de peau

On a $\underline{k} = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}(1-i)$. On pose $k' = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}$ et $k" = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}$.

On a alors : $\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \overrightarrow{\underline{E_0}}\exp\left(-k"z\right)\exp\left(i(\omega t - k'z)\right)$.

Cela correspond à une onde qui se propage à la vitesse de phase $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma_0}}}$ sur une distance caractéristique $\boxed{\delta = \frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$.

III Propagation dans un milieu neutre défini par son indice complexe

III.1 Généralités

On considère une OPPM em se propageant selon $\overrightarrow{u}$ dans un milieu défini par son indice complexe $\underline{n}$:

$$\boxed{\underline{k}(\omega) = \underline{n}(\omega)\frac{\omega}{c}}$$

Le champ électrique peut écrire sous la forme : $\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \overrightarrow{\underline{E_0}}\exp\left[i(\omega t - \overrightarrow{\underline{k}}\cdot\overrightarrow{r})\right]$, avec $\overrightarrow{\underline{k}} = \underline{k}\overrightarrow{u} = \underline{n}\frac{\omega}{c}\overrightarrow{u}$

On considère le milieu comme neutre.
Les équations de Maxwell en notations complexes s'écrivent :

$$\boxed{\begin{array}{llll} \text{MG} & -i\overrightarrow{\underline{k}}\cdot\overrightarrow{\underline{E}} = 0 & \text{M}\Phi & -i\overrightarrow{\underline{k}}\cdot\overrightarrow{\underline{B}} = 0 \\ \text{MF} & -i\overrightarrow{\underline{k}}\wedge\overrightarrow{\underline{E}} = -i\omega\overrightarrow{\underline{B}} & & \end{array}}$$

On retrouver une structure similaire à l'OPPM em dans le vide en remplaçant c par $\frac{c}{\underline{n}}$.

Relation de structure : $\boxed{\underline{\overrightarrow{B}} = \underline{n}\dfrac{\overrightarrow{u} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{c}}$

III.2 Cas d'un diélectrique transparent

Dans un milieu transparent il n'y a pas d'absorption : $\underline{k}$ et $\underline{n}$ sont réels.

$$\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{E_0}} \exp\left[i(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r})\right]$$

et $\underline{\overrightarrow{B}}(M,t) = n\dfrac{\overrightarrow{u} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}(M,t)}{c}$

III.3 Vitesse de phase

Soit v_φ la vitesse de phase de l'onde. Par définition

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{|\Re e(\underline{k})|}}$$

III.4 Paquets d'ondes, vitesse de groupe

On s'intéresse uniquement aux effets dispersifs. Par conséquent, on néglige l'absorption et on a $\underline{k}(\omega) = k_1(\omega)$ réel. Le vitesse de phase v_φ dépend de ω.

a Modèle du paquet d'onde

Rappel : Pour une fonction à support borné (c'est-à-dire une fonction nulle hors d'un domaine borné)

Transformée de Fourier : On définit la transformée de Fourier d'un signal temporel $f(t)$ par

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Théorème d'inversion : On montre que le signal temporel peut être reconstitué à partir de sa transformée de Fourier par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{+j\omega t} d\omega.$$

Ceci signifie donc que $f(t)$ peut être considéré comme une superposition d'une infinité de fonctions sinusoïdales.

Spectre : Le spectre est continu ; il est décrit par la fonction $\omega \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}|\hat{f}(\omega)|$.

Si on note τ l'extension temporelle de f (intervalle de temps sur lequel f a une valeur significative) et $\delta\omega$ la largeur spectrale de f (intervalle de pulsation sur lequel $\hat{f}$ a une valeur significative), on a une relation entre ces deux extension :

$$\tau \delta\omega \simeq 2\pi$$

Exemple du train de sinusoïde : la transformée de Fourier de cette fonction est

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \frac{S_m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \cos(\omega_0 t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \frac{S_m}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \left(e^{-j(\omega-\omega_0)t} + e^{-j(\omega+\omega_0)t}\right)\mathrm{d}t$$

soit,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{S_m\tau}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin((\omega-\omega_0)\tau/2)}{(\omega-\omega_0)\tau/2} + \frac{\sin((\omega+\omega_0)\tau/2)}{(\omega+\omega_0)\tau/2}\right],$$

ce qui peut s'écrire,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{S_m\tau}{2\sqrt{2\pi}} \left(\mathrm{sinc}((\omega-\omega_0)\tau/2) + \mathrm{sinc}((\omega+\omega_0)\tau/2)\right).$$

Définition : Un paquet d'ondes un ensemble d'OPPM dont la somme est une fonction d'extension temporelle finie.

On note $s(z,t)$ une composante du champ $\overrightarrow{E}(M,t)$ se propageant selon $\overrightarrow{u_z}$. On a $s(z,t) = \Re(\underline{s}(z,t))$ avec

$$\underline{s}(z,t) = \int_0^{\infty} \underline{A}(\omega)\exp\left[i(\omega t - k(\omega)z\right]\mathrm{d}z \quad \text{avec} \quad \underline{A}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} s(0,t)\exp(-i\omega t)\mathrm{d}t$$

Pour un paquet d'ondes centré sur ω_0 :

$$\underline{s}(z,t) = \int_{\omega_0-\delta\omega/2}^{\omega_0+\delta\omega/2} \underline{A}(\omega)\exp\left[i(\omega t - k(\omega)z\right]\mathrm{d}z$$

Exemple du paquet d'ondes gaussien :

$$s(0,t) = S_0\exp\left[-\left(\frac{t}{t_0}\right)^2\right]\cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad A(\omega) = \frac{S_0 t_0}{2\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{1}{4}t_0^2(\omega-\omega_0)^2\right] \quad \text{avec} \quad \omega_0 t_0 \gg 1$$

IV Réflexion et transmission d'une OPPM em à l'interface entre deux milieux

IV.1 Position du problème

a Conventions et onde incidente

On considère 2 milieux séparé par une surface plane en $z = 0$.

L'onde incidente se propage dans le milieu dans la direction Oz normale à la surface plane séparant le milieu d'indice n_1 (demi-espace $z < 0$) du milieu d'indice n_2 (demi-espace $z > 0$).
On étudie le comportement d'une onde polarisée rectilignement. Nous prendrons une onde plane harmonique polarisée selon $\overrightarrow{e_x}$.
Le champ électrique a pour expression :

$$\underline{\overrightarrow{E_i}}(z,t) = E_0\exp\left(\omega t - \underline{k_1}z\right)\overrightarrow{e_x},$$

avec $\underline{k_1} = \frac{n_1\omega}{c}$. Le champ magnétique s'en déduit par la relation de structure :

$$\underline{\overrightarrow{B_i}}(z,t) = \frac{n_1}{c}\overrightarrow{e_z} \wedge \underline{\overrightarrow{E_i}}(z,t) = \frac{n_1 E_0}{c}\exp\left(\omega t - \underline{k_1}z\right)\overrightarrow{e_y}.$$

b Onde réfléchie et onde transmise

Le champ électrique de l'onde réfléchie a pour expression :

$$\underline{\overrightarrow{E_r}}(z,t) = \underline{E_{r0}} \exp\left(\omega t + \underline{k_1} z\right) \overrightarrow{e_x},$$

Le champ magnétique s'en déduit par la relation de structure :

$$\underline{\overrightarrow{B_r}}(z,t) = -\frac{\underline{n_1}}{c}\overrightarrow{e_z} \wedge \underline{\overrightarrow{E_r}}(z,t) = -\frac{\underline{n_1}\,\underline{E_{r0}}}{c} \exp\left(\omega t + \underline{k_1} z\right) \overrightarrow{e_y}.$$

Le champ électrique de l'onde transmise a pour expression :

$$\underline{\overrightarrow{E_t}}(z,t) = \underline{E_{t0}} \exp\left(\omega t - \underline{k_2} z\right) \overrightarrow{e_x},$$

Le champ magnétique s'en déduit par la relation de structure :

$$\underline{\overrightarrow{B_t}}(z,t) = \frac{\underline{n_2}}{c}\overrightarrow{e_z} \wedge \underline{\overrightarrow{E_t}}(z,t) = \frac{\underline{n_2}\,\underline{E_{t0}}}{c} \exp\left(\omega t - \underline{k_2} z\right) \overrightarrow{e_y}.$$

Posons $\underline{E_{r0}} = \underline{r_E}\,\underline{E_0}$ et $\underline{E_{t0}} = \underline{t_E}\,\underline{E_0}$. Les coefficients r_E et t_E sont respectivement le coefficient de réflexion et le coefficient de transmission du dioptre.

IV.2 Coefficients complexes de réflexion et de transmission en amplitude

Les relations de passage conduisent alors au système suivant :

$$\begin{cases} 1 + \underline{r_E} = \underline{t_E} \\ \underline{n_1}\left(1 - \underline{r_E}\right) = \underline{n_2}\underline{t_E} \end{cases} \quad \text{dont les solutions sont} \quad \begin{cases} \underline{r_E} = \dfrac{\underline{n_1} - \underline{n_2}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \\ \underline{t_E} = \dfrac{2\underline{n_1}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \end{cases}$$

IV.3 Cas de deux milieux transparents

Les indices des deux milieux sont réels.

On a

$$\begin{cases} r_E = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ t_E = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{cases}$$

Le champ électrique de l'onde incidente a pour expression :

$$\underline{\overrightarrow{E_i}}(z,t) = E_0 \exp\left(\omega t - k_1 z\right) \overrightarrow{e_x},$$

Le champ magnétique s'en déduit par la relation de structure :

$$\underline{\overrightarrow{B_i}}(z,t) = \frac{n_1 E_0}{c} \exp\left(\omega t - k_1 z\right) \overrightarrow{e_y}.$$

Le champ électrique de l'onde réfléchie a pour expression :

$$\underline{\overrightarrow{E_r}}(z,t) = r_E E_0 \exp\left(\omega t + k_1 z\right) \overrightarrow{e_x},$$

Le champ magnétique s'en déduit par la relation de structure :

$$\underline{\overrightarrow{B_r}}(z,t) = -\frac{n_1 r_E E_0}{c} \exp\left(\omega t + k_1 z\right) \overrightarrow{e_y}.$$

Le champ électrique de l'onde transmise a pour expression :

$$\underline{\overrightarrow{E_t}}(z,t) = t_E E_0 \exp\left(\omega t - k_2 z\right) \overrightarrow{e_x},$$

Le champ magnétique s'en déduit par la relation de structure :

$$\underline{\overrightarrow{B_t}}(z,t) = \frac{n_2 t_E E_0}{c} \exp\left(\omega t - k_2 z\right) \overrightarrow{e_y}.$$

On obtient la démonstration du phénomène de déphasage à la réflexion d'une onde provenant d'un milieu d'indice n_1 sur un milieu d'indice $n_2 > n_1$.

Bilan énergétique

Le vecteur de Poynting a pour expression :

— dans l'onde incidente :

$$\overrightarrow{\Pi_i} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E_i} \wedge \overrightarrow{B_i} = \frac{n_1}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(\omega t - n_1 z/c)\overrightarrow{e_z}.$$

— dans l'onde réfléchie :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Pi_r} &= \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E_r} \wedge \overrightarrow{B_r}\\ &= -\frac{n_1 r_E^2}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(\omega t + n_1 z/c)\overrightarrow{e_z}\\ &= -\frac{n_1(n_1-n_2)^2}{(n_1+n_2)^2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t + n_1 z/c)\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

— dans l'onde transmise :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Pi_t} &= \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E_t} \wedge \overrightarrow{B_t}\\ &= \frac{4 n_2 n_1^2}{(n_1+n_2)^2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - n_2 z/c)\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

Sur le plan $z = 0$, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Pi_i} - \overrightarrow{\Pi_t} + \overrightarrow{\Pi_r} &= \left(1 - \frac{(n_1-n_2)^2 - 4n_2 n_1}{(n_1+n_2)^2}\right)\frac{n_1}{\mu_0 c}E_0^2\cos^2(\omega t)\overrightarrow{e_z}\\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Cette équation traduit la conservation de l'énergie à la traversée du dioptre.

On appelle souvent coefficients de réflexion et de transmission en énergie les rapports :

$$R = \frac{\langle \mathcal{P}_r \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} \text{ et } T = \frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle}$$

où $\mathcal{P}_i$ est la puissance par unité de surface transportée par l'onde incidente, $\mathcal{P}_r$ est la puissance par unité de surface transportée par l'onde réfléchie, $\mathcal{P}_t$ est la puissance par unité de surface transportée par l'onde transmise. Ces coefficients s'expriment aisément en fonction des indices par

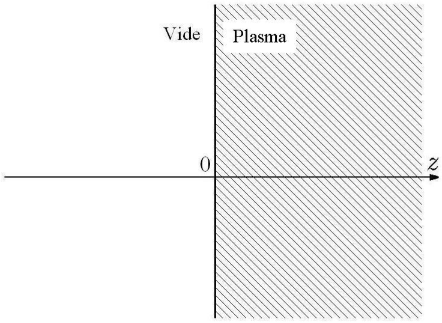
$$\begin{cases} R = r_E^2 = \dfrac{(n_1-n_2)^2}{(n_1+n_2)^2}\\ T = \dfrac{n_2}{n_1}t_E^2 = \dfrac{4n_2 n_1}{(n_1+n_2)^2}\end{cases}$$

La conservation de l'énergie se traduit alors par

$$1 = T + R$$

IV.4 Cas de l'interface vide-plasma

a Modélisation



Une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement se propage dans le vide dans la direction $\overrightarrow{e_z}$;

$$\underline{\overrightarrow{E_i}} = \overrightarrow{E_0} e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} z\right)}$$

Elle rencontre en $z = 0$ un plasma de conductivité $\underline{\gamma}$ occupant le demi-espace $z > 0$. Ceci donne naissance à une onde réfléchie

$$\underline{\overrightarrow{E_r}} = \underline{r_E} \overrightarrow{E_0} e^{i\left(\omega t + \frac{\omega}{c} z\right)}$$

et à une onde transmise

$$\underline{\overrightarrow{E_t}} = \underline{t_E} \overrightarrow{E_0} e^{i\left(\omega t - \underline{k_p} z\right)}$$

avec

$$\begin{cases} \underline{r_E} = \dfrac{1 - \underline{n_2}}{1 + \underline{n_2}} \\ \underline{t_E} = \dfrac{2}{1 + \underline{n_2}} \end{cases}$$

et $\underline{k_p} = \underline{n_2} \dfrac{\omega}{c}$.

b Équations locales dans le plasma

La densité de courant est reliée au champ électrique par

$$\underline{\overrightarrow{j}} = \underline{\gamma} \times \underline{\overrightarrow{E}} = -i \frac{n_0 e^2}{m_e \omega} \underline{\overrightarrow{E}} = -i \epsilon_0 \frac{\omega_P^2}{\omega} \underline{\overrightarrow{E}}$$

et la densité volumique de charge est nulle. Les équations de Maxwell se réduisent donc à :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\overrightarrow{B}} = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \underline{\overrightarrow{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\overrightarrow{B}}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \underline{\overrightarrow{E}} = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \underline{\overrightarrow{B}} = \dfrac{i}{c^2} \left(-\dfrac{\omega_P^2}{\omega} + \omega \right) \underline{\overrightarrow{E}} \end{cases}$$

On en déduit la relation de dispersion

$$\underline{k_p}^2 c^2 = \omega^2 - \omega_P^2$$

c Coefficients de réflexion et de transmission pour $\omega > \omega_P$

$\underline{k_p}$ est réel positif : $k_p = \dfrac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c} = \underline{n_2}\dfrac{\omega}{c}$, soit $\boxed{n_2 = \sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$.

Le champ magnétique se déduit du champ électrique par l'équation de Maxwell-Faraday qui s'écrit, en représentation complexe

$$-i\omega\underline{\overrightarrow{B_t}} = -i\underline{k_P}\overrightarrow{e_z}\wedge\underline{\overrightarrow{E_t}}$$

soit

$$\overrightarrow{B_t} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{\omega_P^2}{\omega^2}}}{c}\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{E_t}$$

On a

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{r_E} = \dfrac{1-\sqrt{1-\dfrac{\omega_P^2}{\omega^2}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{\omega_P^2}{\omega^2}}}\\[2ex] \underline{t_E} = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\dfrac{\omega_P^2}{\omega^2}}}\end{array}\right.$$

Les coefficients de réflexion et de transmission en puissance sont donc

$$\left\{\begin{array}{l}R = \left(\dfrac{1-\sqrt{1-\dfrac{\omega_P^2}{\omega^2}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{\omega_P^2}{\omega^2}}}\right)^2\\[2ex] T = \left(\dfrac{2}{1+\sqrt{1-\dfrac{\omega_P^2}{\omega^2}}}\right)^2\sqrt{1-\dfrac{\omega_P^2}{\omega^2}}\end{array}\right.$$

On vérifie que

$$R+T=1$$

d Coefficients de réflexion et de transmission pour $\omega < \omega_P$

$\underline{k_p}$ est imaginaire pur : $\underline{k_p} = -i\dfrac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c} = \underline{n_2}\dfrac{\omega}{c}$, soit $\boxed{\underline{n_2} = -i\sqrt{\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}-1}}$.

Les coefficients de réflexion et de transmission deviennent complexes :

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{r_E} = \dfrac{1+i\sqrt{\dfrac{\omega_P^2}{\omega^2}-1}}{1-i\sqrt{\dfrac{\omega_P^2}{\omega^2}-1}}\\[2ex] \underline{t_E} = \dfrac{2}{1-i\sqrt{\dfrac{\omega_P^2}{\omega^2}-1}}\end{array}\right.$$

On voit que $|\underline{r_E}| = 1$; on en déduit que

$$\begin{cases} R = 1 \\ \\ T = 0 \end{cases}$$

Le coefficient de transmission en puissance est nul puisqu'il n'y a pas de propagation dans le plasma. Celui-ci se comporte donc comme un miroir parfait.