

Devoir surveillé n°5

Samedi 08 février 2025

Durée : 3h00

- Vous devez vérifier que le sujet comprend 10 pages numérotées.
- Vous êtes invités à porter une attention toute particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Toute réponse devra être justifiée et ce, même si l'énoncé ne le précise pas (sauf mention particulière).
- Vous devez établir une relation littérale avant d'effectuer toute application numérique (sauf mention particulière).
- Toute relation littérale présentant une erreur flagrante d'homogénéité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- Le téléphone portable est strictement interdit. Il doit être rangé éteint dans le sac.
- La calculatrice est autorisée.

Première partie

Mesures interférométriques de la durée d'un train d'onde

Données

Vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

La fonction **sinus cardinal** est par définition $\text{sinc}(u) = \frac{\sin(u)}{u}$.

Elle possède un maximum principal égal à 1 pour $u = 0$, des zéros pour les valeurs de u égales à $u_{min} = n\pi$, avec n entier relatif non nul et des maxima secondaires pour des valeurs proches de $u_{max} = (2p + 1)\frac{\pi}{2}$ avec p entier relatif différent de 0 et -1 .

I Interférences lumineuses à 2 ou 3 ondes

On considère (figure 1) un faisceau de lumière parallèle de longueur d'onde λ_0 , se propageant dans la direction Oz . Ce faisceau arrive sur un écran placé dans le plan (xOy) , $z = 0$, percé de deux trous identiques T_1 et T_2 . Les centres des trous O_1 et O_2 ont pour coordonnées respectivement $(\frac{a}{2}, 0, 0)$ et $(-\frac{a}{2}, 0, 0)$.

Le rayon des trous est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. Ceci permet de supposer qu'il existe un champ d'interférences qui est la zone commune aux deux faisceaux diffractés par les trous. On modélise chaque trou par une source secondaire ponctuelle émettant une lumière uniforme dans le champ d'interférences. Ces sources secondaires sont cohérentes entre elles.

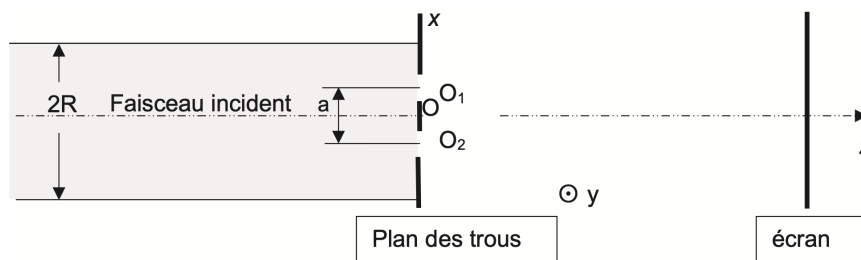


Figure 1 – Géométrie du dispositif à deux trous

- On observe sur un écran placé dans le plan $z = D$, en un point M de coordonnées (x, y, D) . On suppose que D est très grand devant $|x|$ et $|y|$. Le montage est réalisé dans l'air d'indice égal à l'unité.
 - De quel type de division interférentielle s'agit-il ? Les interférences sont-elles localisées ?
 - Établir (dans le cadre de l'approximation scalaire de l'optique) l'expression de la différence de marche $\delta(M)$.
 - Rappeler l'expression de l'intensité $I(M)$ au point M en notant I_{max} l'intensité maximale.
- Décrire ce qu'on doit voir sur l'écran dans le cadre de ces hypothèses et exprimer l'interfrange i en fonction de la fréquence d'émission ν_0 , de c et des paramètres géométriques du dispositif.
 - Pourquoi, dans ce cadre, peut-on remplacer les deux trous par deux fentes fines identiques parallèles à Oy ? Quel en est l'intérêt ?
- La source est en réalité quasi-monochromatique à profil spectral " rectangulaire " de largeur $\Delta\lambda$ autour de λ_0 avec $\Delta\lambda \ll \lambda_0$. Ce profil spectral, en fonction de la fréquence d'émission, est représenté sur la figure

suiivante (figure 2). On admet que l'intensité émise par une bande spectrale de largeur $d\nu$ autour de ν vaut $dI = J_\nu d\nu$. On pose $J_0 = \frac{I_0}{\Delta\nu}$.

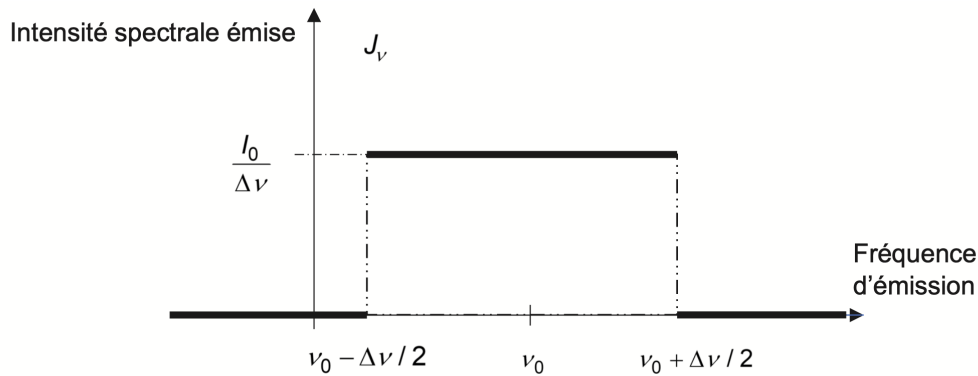


Figure 2 – Profil " rectangulaire " d'une source quasi-monochromatique
Par commodité de représentation, l'échelle n'est pas respectée ($\Delta\nu \ll \nu$)

- (a) Établir l'expression de l'intensité $I(M)$ au point M en notant I_{max} l'intensité maximale et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$I(M) = \frac{I_{max}}{2} \left(1 + V(M) \cos \left(\frac{2\pi x}{i} \right) \right),$$

avec i l'interfrange correspondant à la valeur centrale de la raie.

On rappelle que $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p+q}{2} \right)$.

- (b) Exprimer la visibilité $V(M)$ correspondante.
(c) Exprimer en fonction de $\Delta\lambda$ et λ_0 la longueur de cohérence L_c , c'est-à-dire la plus petite valeur de la différence de marche δ à partir de laquelle les franges ne sont plus visibles. Vérifier que ce résultat correspond au critère de brouillage des franges portant sur l'ordre d'interférences.

On rappelle le lien entre les deux largeurs spectrales : $\Delta\nu = \frac{c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda$.

- (d) Établir la durée τ des trains d'onde ou temps de cohérence.
(e) Justifier pourquoi on définit le nombre d'interfranges visibles par $N = \frac{2L_c}{\lambda_0}$.
(f) Dans le tableau ci-dessous sont indiquées des caractéristiques de sources quasi-monochromatiques. Après l'avoir recopié sur votre copie, le compléter et le commenter.

Source	λ_0 en nm	$\Delta\lambda$ en nm	τ en s	L_c en m	N
Laser He-Ne	632,991	0,001			
Raie rouge de l'hydrogène	656,2	0,1			
Lumière blanche filtrée	500	20			

Dans la suite de cette partie, on considère que la source est rigoureusement monochromatique de longueur d'onde λ .

4. Une troisième fente, identique au deux autres, parallèle à Oy , est placée en $O(0, 0, 0)$. Le plan des trois fentes est placé orthogonalement à l'axe de révolution commun de deux lentilles minces convergentes de distance focale $f' = 50$ cm. La lumière provient d'une fente source monochromatique, parallèle aux fentes diffractantes, placée au foyer principal objet de la première lentille (lentille d'entrée). L'écran d'observation est confondu avec le plan focal image de la seconde lentille (lentille de sortie), placée en aval du plan percé.

- Faire une représentation schématique du montage.
- Représenter les cheminements des trois rayons qui interfèrent en un point M de l'écran.
- Établir la nouvelle fonction intensité $I(\varphi)$ en posant $\varphi = \frac{\pi ax}{\lambda f'}$. On fera figurer l'intensité I_0 qui correspondrait à celle d'une fente unique identique.
- Représenter $I(\varphi)$.
- On donne sur la photo 1 ce qu'on voit sur l'écran pour une lumière monochromatique rouge de longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$. À partir de cette photo, évaluer la distance entre les deux fentes en considérant que seule la zone comprise entre les abscisses $x = 2,1 \text{ mm}$ et $x = -2,1 \text{ mm}$ correspond au calcul de l'intensité tel qu'il a été fait, c'est-à-dire sans tenir compte de la largeur des fentes diffractantes.

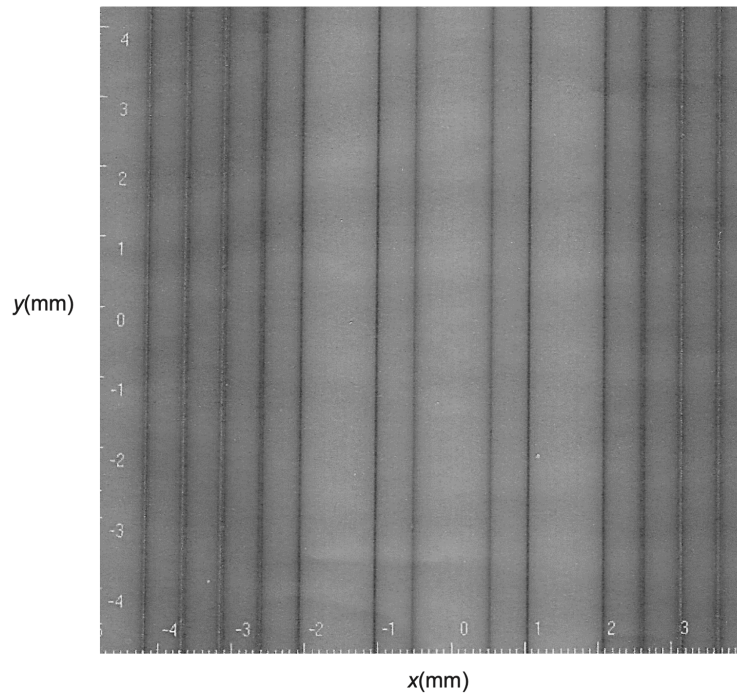


Photo 1 – Interférences à 3 fentes (plateforme.sillages.info)
Les graduations sont en mm

II Interféromètre de Michelson

On cherche dans cette partie à faire une mesure de la largeur spectrale (donc de la durée moyenne du train d'onde τ_0) de la raie $\lambda_v \simeq 541,6 \text{ nm}$ du mercure (Hg). Pour cela on utilise un interféromètre de Michelson et ce afin de réaliser une mesure interférométrique par division d'amplitude.

A. Description de l'interféromètre de Michelson idéal

On considère en figure 3 l'interféromètre de Michelson dans sa représentation « idéale », constitué par une lame semi-réfléchissante infiniment fine séparatrice $[S_p]$, dont les facteurs de transmission et de réflexion valent 0,5 et par deux miroirs plans $[M_1]$ et $[M_2]$. Les miroirs $[M_1]$ et $[M_2]$ sont réglés orthogonalement l'un à l'autre, de façon à observer des franges d'égale inclinaison.

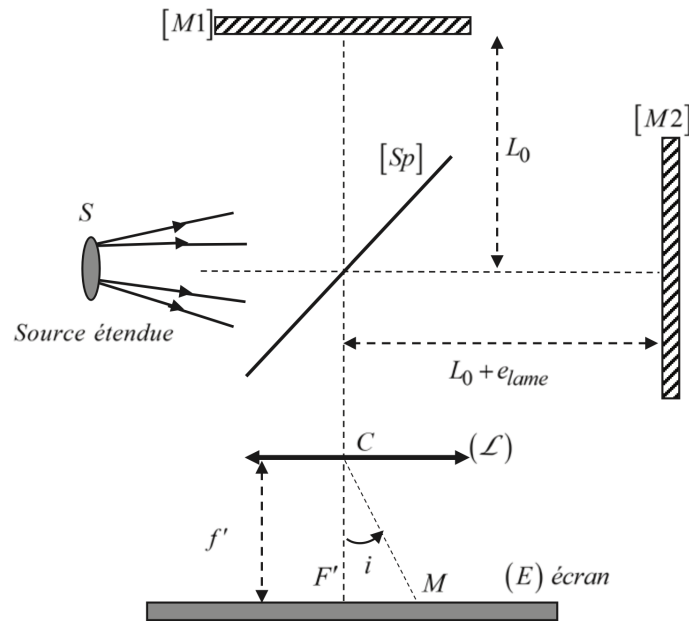


Figure 3 – Représentation simplifiée et « idéale » de l'interféromètre de Michelson

Le miroir $[M_1]$ est situé à une distance L_0 de la séparatrice.

Le miroir $[M_2]$ est situé à une distance $L_0 + e_{\text{lame}}$ de la séparatrice.

L'écran est placé dans le plan focal image d'une lentille mince convergente (\mathcal{L}) de distance focale $f' \simeq 1$ m, de centre C , utilisée dans les conditions de Gauss. Le tout est plongé dans l'air d'indice assimilé à l'indice du vide : $n_{\text{air}} = n_{\text{vide}} = 1$.

On éclaire l'interféromètre avec une source spatialement étendue, considérée ici monochromatique de longueur d'onde $\lambda_v = 541,6$ nm.

5. Par un schéma équivalent du montage interférentiel, expliquer pourquoi on appelle cette configuration le montage en « lame d'air ». Représenter sur votre schéma deux rayons qui interfèrent en un point M de l'écran, caractérisé par l'inclinaison angulaire $i(M) = (\overrightarrow{CF'}, \overrightarrow{CM})$.
6. Montrer que la différence de marche δ entre les deux ondes qui interfèrent en M (par division d'amplitude) est donnée par $\delta = 2 e_{\text{lame}} \cos(i)$.
Donner l'expression de l'intensité lumineuse au point M .
Quel est l'aspect de la figure d'interférence observée sur l'écran ?
7. On place un détecteur en F' , au centre de l'écran. Ce détecteur délivre un signal proportionnel à l'intensité lumineuse. À partir de l'instant $t = 0$ où le Michelson est au contact optique, on chariote le miroir mobile M_2 à la vitesse $v = 250 \text{ nm}\cdot\text{s}^{-1}$ selon $+Ox$.
 - (a) Exprimer $I(t)$ intensité lumineuse reçue par le détecteur. Tracer l'allure de l'interférogramme observé.
 - (b) On se place à l'instant $t_1 = 5$ minutes. Calculer l'épaisseur de la lame d'air.
L'écran est un carré de côté a . Combien voit-on d'anneaux brillants? (On considèrera que le centre de la figure correspond à un ordre d'interférence entier).
Calculer le rayon du 3ième anneau brillant.
Données : $a = 20$ cm et on se place dans l'approximation des petits angles.

B. Largeur spectrale d'une raie d'émission

En fait, l'enregistrement conduit à l'interférogramme représenté ci-dessous qui montre que la raie verte du mercure n'est pas monochromatique mais présente une certaine largeur spectrale $\Delta\lambda_v$.

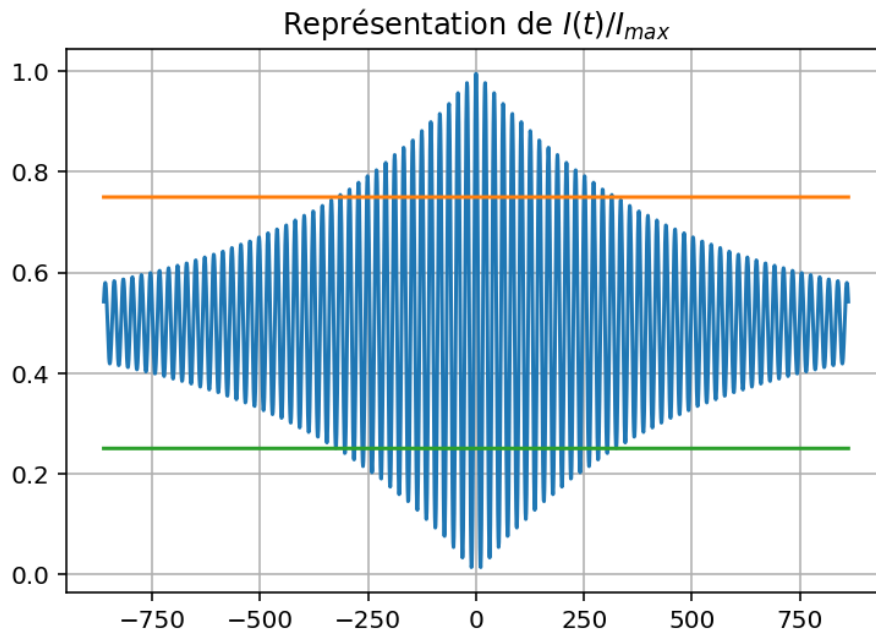


Figure 4 – Interférogramme réel

8. Quels sont les phénomènes physiques qui contribuent à la largeur d'une raie spectrale ?
9. Pour une lampe à mercure haute pression, on modélise les raies spectrales par des raies *lorentziennes*. On attribue ainsi à la raie verte du mercure une distribution d'intensité spectrale :

$$J(\sigma) = \frac{dI_0(\sigma)}{d\sigma} = \frac{J_0 (\Delta\sigma_v)^2}{(\sigma - \sigma_v)^2 + (\Delta\sigma_v)^2}$$

où $J_0 = \text{Cte}$, $\sigma_v = \frac{1}{\lambda_v}$ (nombre d'onde) et $\Delta\sigma_v = \frac{\Delta\lambda_v}{\lambda_v^2}$.

Montrer que l'intensité lumineuse reçue par le détecteur en F' est :

$$I(\delta) = \pi J_0 \Delta\sigma_v [1 + \cos(2\pi\sigma_v\delta) \exp(-2\pi|\delta|\Delta\sigma_v)].$$

On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\sigma\delta) d\sigma}{(\sigma - \sigma_0)^2 + (\Delta\sigma)^2} = \frac{\pi}{\Delta\sigma} \cos(2\pi\sigma_0\delta) \exp(-2\pi|\delta|\Delta\sigma).$$

Penser au changement de variable $\tan x = \frac{\sigma - \sigma_v}{\Delta\sigma_v}$.

10. On observe que l'enveloppe de l'interférogramme diminue de moitié pour $t = t_{1/2}$. En déduire l'expression de $\Delta\lambda_v$ en fonction de λ_v , $t_{1/2}$ et v .
11. Déduire du résultat précédent la longueur de cohérence temporelle L_c de la raie verte du mercure.

Deuxième partie

Découverte de Proxima du Centaure

Ce problème est une invitation à regarder vers les étoiles, et tout particulièrement l'étoile la plus proche de la planète Terre après le Soleil : Proxima du Centaure aussi appelée *Proxima Centauri*.

On s'intéresse à l'observation de Proxima du Centaure et à la détermination de sa distance et de sa taille.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé ; d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

I Première observation de l'étoile

L'étoile *Proxima Centauri* a été découverte en 1915 par l'astronome britannique Robert Innes, alors directeur de l'observatoire de l'Union à Johannesburg en Afrique du Sud. C'est une étoile de type naine rouge, de masse $M_E = 2,44 \cdot 10^{29}$ kg et de rayon $R_E = 9,81 \cdot 10^4$ km. Elle est située à $D_E = 3,99 \cdot 10^{13}$ km soit 4,22 années-lumière du Soleil.

Dans la suite du sujet, toutes les applications numériques seront faites à la longueur d'onde moyenne du visible $\lambda_{\text{obs}} = 600$ nm.

Q 1. Justifier, par un argument d'ordre de grandeur, que la distance entre la Terre et Proxima du Centaure peut être approximée à 4,22 années-lumière.

Pour voir l'étoile *Proxima Centauri*, un instrument d'optique est utilisé. Il est modélisé dans la suite par deux lentilles :

- une lentille convergente L_1 objectif, de centre optique O_1 , de foyer principal objet F_1 , de foyer principal image F'_1 et de distance focale image $f'_1 = 8$ m ;
- une lentille divergente L_2 de projection, de centre optique O_2 , de foyer principal objet F_2 , de foyer principal image F'_2 et de distance focale image $f'_2 = -0,02$ m.

Si le point objet A sur l'axe optique et le point image A' sont conjugués par la lentille L de focale f' et de centre O , d'après la formule de Descartes on a

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

et le grandissement transversal est

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

L'instrument d'optique est pointé vers l'étoile *Proxima Centauri*.

Q 2. Où est située l'image de l'étoile par la lentille L_1 , appelée image intermédiaire A_1B_1 ? Illustrer cette situation par un schéma.

Q 3. Déterminer l'expression de la taille de cette image intermédiaire A_1B_1 (non algébrique) en fonction du rayon R_E de l'étoile et des caractéristiques de la lentille objectif L_1 .

- Q 4.** La lentille de projection L_2 , divergente, sert à faire de l'image intermédiaire A_1B_1 une image définitive $A'B'$, réelle, non inversée et agrandie d'un facteur 4. Calculer la distance algébrique $\overline{O_2A_1}$ pour respecter ces contraintes.
- Q 5.** Illustrer par un schéma la position de A_1B_1 , de $A'B'$ et de L_2 (sans représenter L_1).
- Q 6.** En 1915, l'image définitive $A'B'$ de l'étoile se formait sur une plaque photographique de dimension 24 mm \times 36 mm, composée de cristaux de $10 \mu\text{m}$ de chlorure d'argent, précipité blanc qui noircit à la lumière. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur la plaque photo ?
- Q 7.** À l'occasion du centenaire de la découverte de Proxima du Centaure, en 2015, la photo de l'étoile a été reprise avec l'instrument d'optique de l'époque mais la plaque photographique a été remplacée par un capteur CCD (Charge Coupled Device) de 100 millions de pixels, de taille identique à la plaque photo originelle. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur le capteur photosensible ?

L'efficacité quantique QE d'un capteur CCD donne le taux de transformation de la lumière en charge, soit la probabilité qu'un photon incident donne « naissance » à un électron dans le capteur. Pour la longueur d'onde étudiée, cette sensibilité quantique QE est de 30%.

- Q 8.** Sachant que la puissance surfacique reçue sur Terre par le Soleil dans le visible est de 600 W.m^{-2} et que la lentille d'entrée de l'instrument est de diamètre $D_1 = 50 \text{ cm}$, de combien d'électrons sera composé le signal résultant de l'étoile pour une exposition de 12 minutes du capteur ? Quelle est la charge produite par le capteur ?
- Q 9.** La diffraction par la lentille d'entrée L_1 est-elle gênante pour les observations ?

II Mesure de la distance entre la Terre et l'étoile

La parallaxe est l'effet du changement de position de l'observateur sur ce qu'il perçoit.

La parallaxe annuelle est, par définition, l'angle qui mesure le déplacement, au cours de l'année, de la position apparente, perçue depuis la Terre, d'une étoile proche par rapport aux étoiles lointaines.

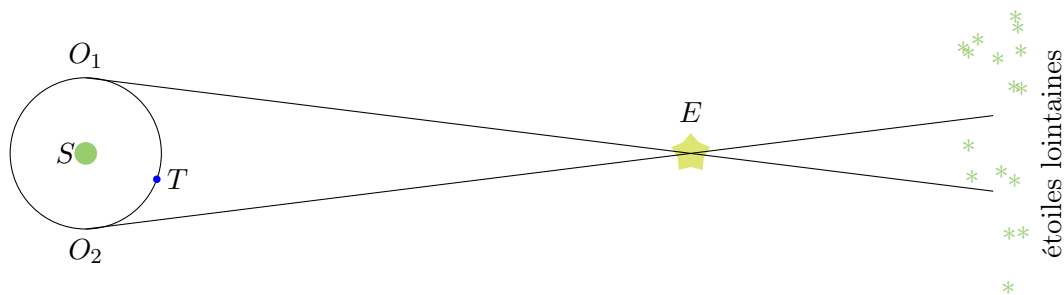


Figure 1 - Schéma explicatif de la mesure de parallaxe solaire

Sur la figure 1, deux instants d'observation sont représentés par O_1 et O_2 .

Le satellite Hipparcos (High Precision Parallax Collection Satellite) a mesuré la parallaxe de $P_E = 1545$ milli-secondes d'arc pour *Proxima Centauri*.

- Q 10.** Calculer, à partir de cette valeur de la parallaxe P_E , la distance séparant l'étoile *Proxima Centauri* du système solaire et comparer à la valeur donnée au début de cette partie.
- Q 11.** Pourquoi la distance entre la Terre et le Soleil varie-t-elle au cours de l'année ?

III Mesure du rayon de l'étoile

En 2002, le VLT (Very Large Telescope) utilisa l'interférométrie pour mesurer le diamètre angulaire de *Proxima Centauri* : $\alpha \simeq 1,02 \pm 0,08$ milliseconde d'arc. Connaissant sa distance, obtenue par la méthode de la parallaxe, il est alors possible de déterminer son rayon.

A. L'étoile est d'abord supposée ponctuelle et l'instrument d'optique est pointée sur elle. L'étoile se situe à l'infini sur l'axe optique de l'instrument, elle est repérée par son centre S . Le dispositif d'interférométrie est modélisé par deux trous d'Young de taille identique, respectivement en T_1 et T_2 , séparés d'une distance a réglable. Ce dispositif est placé devant la lentille convergente L_1 de l'instrument d'optique. Pour simplifier, on ne tiendra pas compte dans cette partie de la seconde lentille L_2 et les observations sont donc effectuées dans le plan de l'image intermédiaire. Un point M dans ce plan est repéré par son abscisse x (figure 2).

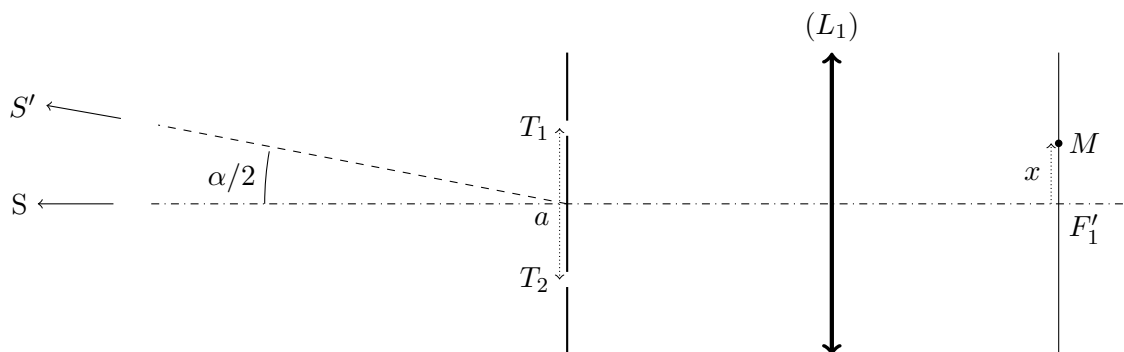


Figure 2 - Schéma du dispositif d'interférométrie pour la mesure du rayon de l'étoile *Proxima Centauri*

- Q 12.** Faire un schéma des deux rayons lumineux passant par T_1 et T_2 qui convergent vers le point M . Représenter la différence de marche entre ces deux rayons sur ce schéma.
- Q 13.** Établir l'expression de l'ordre d'interférence $p_S(M)$, produit par la source S au point M .
- Q 14.** Décrire alors la figure d'interférences.
- Q 15.** En notant I_0 l'intensité moyenne, donner, sans démonstration, l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$ dans le plan d'observation.

B. L'étoile est à présent modélisée comme une source étendue vue sous un diamètre angulaire α . On considère un autre point source S' à la périphérie de l'étoile (figure 2).

- Q 16.** Faire un schéma des deux rayons lumineux issus de S' , passant par T_1 et T_2 et qui convergent vers le point M . Représenter la différence de marche entre ces deux rayons sur ce schéma.
- Q 17.** Établir l'expression de l'ordre d'interférence $p_{S'}(M)$ produit par la source S' au point M .
- Q 18.** En déduire l'expression de la plus petite valeur de a qui conduit au brouillage de la figure d'interférence produite par les deux sources incohérentes S et S' .
- Q 19.** Faire l'application numérique et commenter.
- Q 20.** Expliquer qualitativement pourquoi le raisonnement précédent, utilisant deux sources ponctuelles l'une située au centre et l'autre sur le bord apparent de l'étoile, rend compte des observations obtenues avec l'objet étendu qu'est la véritable étoile.

Données

Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Rayon moyen de la Terre	$R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$
Distance Terre-Soleil	$D_{TS} = 1,50 \cdot 10^8 \text{ km}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	$R_S = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$
Masse du Soleil	$M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$