Mesures interférométrique de la durée d'un train d'onde

46

I - Interférences lumineuses à 2 ou 3 ondes

CCP MP 2024

1h

1) a) Il s'agit d'un montage à division du front d'onde.
Les interférences ne sont pas localisées car les sources secondaires sont ponctuelles.

b) Par définition $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$

avec $(S_2M) = n_{air} S_2M = S_2M$

$$S_2M = \| \vec{S_2M} \| = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$$

$$= D \sqrt{1 + \frac{y^2 + (x + a/2)^2}{D^2}}$$

$$\simeq D \left[1 + \frac{1}{2D^2} \left(y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \right) \right]$$

De même

$$S_1M \simeq D \left[1 + \frac{1}{2D^2} \left(y^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right) \right]$$

On obtient

$$\delta(M) = D \frac{1}{2D^2} 2x a \qquad \boxed{\delta(M) = \frac{ax}{D}}$$

52 c) Les deux sources secondaires sont cohérentes, on peut appliquer la formule de Fresnel

$$I(M) = 2 I_0 \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \right) \right)$$

$$\boxed{I(M) = I_{max} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda_0 D} \right) \right)}$$

2) a) $\delta = cte \Leftrightarrow x = cte$ les franges sont rectilignes

56 Soit i l'interfrange $i = \dfrac{\lambda_0 D}{a}$

avec $\lambda_0 = cT = c/\nu_0$

Il vient $\boxed{i = \frac{cD}{\nu_0 a}}$

58 (b) On constate que $I(M)$ ne dépend pas de y.
Donc si on décale les trous d'Young selon y, on obtient la même figure d'interférence.
On peut remplacer les trous par 2 fentes fines parallèles à Oy.
Cela permet d'avoir un I_{max} plus grand.

3) (a) Toutes les fréquences sont incohérentes entre elles.
Pour une bande spectrale $d\nu$, autour de ν_0 on a une intensité

$$dI_\nu(M) = dI\left(1 + \cos 2\pi \frac{\nu a x}{cD}\right)$$
$$= J_\nu\, d\nu \left(1 + \cos 2\pi \frac{\nu a x}{cD}\right)$$

L'intensité totale en M vaut

$$I(M) = \int dI_\nu(M)$$
$$= \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} J_0\left(1 + \cos 2\pi \frac{\nu a x}{cD}\right) d\nu$$
$$= J_0 \Delta\nu + J_0 \left[\frac{\sin \frac{2\pi \nu a x}{cD}}{2\pi x a} cD\right]_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}}$$
$$= J_0 \Delta\nu \left[1 + \frac{cD}{2\pi \Delta\nu\, a x}\left(\sin \frac{2\pi a x}{cD}\left(\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}\right) - \sin \frac{2\pi a x}{cD}\left(\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}\right)\right)\right]$$
$$= I_0 \left[1 + \frac{2cD}{2\pi a x \Delta\nu} \sin\left(\frac{\pi a x}{cD}\Delta\nu\right) \cos\left(\frac{2\pi a x \nu_0}{cD}\right)\right]$$

$$\boxed{I(M) = \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{I_{max}}{2}}}{I_0} \left[1 + \underbrace{\frac{cD}{\pi a x \Delta\nu} \sin\left(\frac{\pi a x \Delta\nu}{cD}\right)}_{V(M) = \operatorname{sinc} \frac{\pi a x \Delta\nu}{cD}} \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi a x \nu_0}{cD}}_{\frac{2\pi x}{i}}\right)\right]}$$

avec $i = \dfrac{cD}{a\nu_0}$

(b) On a $\boxed{V(M) = \operatorname{sinc}\left(\dfrac{\pi a \Delta\nu}{cD} x\right)}$

12 (c) $V(M) = 0$ pour $\pi \dfrac{\delta \Delta\nu}{c} = \pi$

Ou $\delta = \dfrac{ax}{D} = \dfrac{c}{\Delta\nu}$ avec $\Delta\nu = \dfrac{c\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$

On a donc $\boxed{L_c = \dfrac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}}$

Critère de brouillage des franges :

$$\left| P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0 + \Delta\lambda/2} \right| \simeq 1/2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta(x)}{\lambda_0} - \frac{\delta(x)}{\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}} \simeq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\delta(x) \cdot \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0^2} \simeq 1 \qquad \boxed{L_c \simeq \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}} \qquad \text{ok}$$

12 (d) On en déduit $\boxed{\tau_c = \dfrac{L_c}{c} = \dfrac{1}{\Delta\nu}}$

(e) Soit N le nombre de franges visibles

$\delta = 0$ frange brillante

On doit avoir $\delta \leq L_c$ or $i = \dfrac{\lambda_0 D}{a}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a\, x_{max}}{D} \leq L_c$

$$\underline{N} = 1 + 2\left\lfloor \frac{x_{max}\, a}{\lambda_0 D} \right\rfloor$$

$$= 1 + 2\left\lfloor \frac{L_c}{\lambda_0} \right\rfloor \simeq \underline{\frac{2L_c}{\lambda_0}}$$

$N = 2k + 1$

avec $k = \left\lfloor \dfrac{x_{max}}{i} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{L_c D}{a} \dfrac{a}{\lambda_0 D} \right\rfloor$

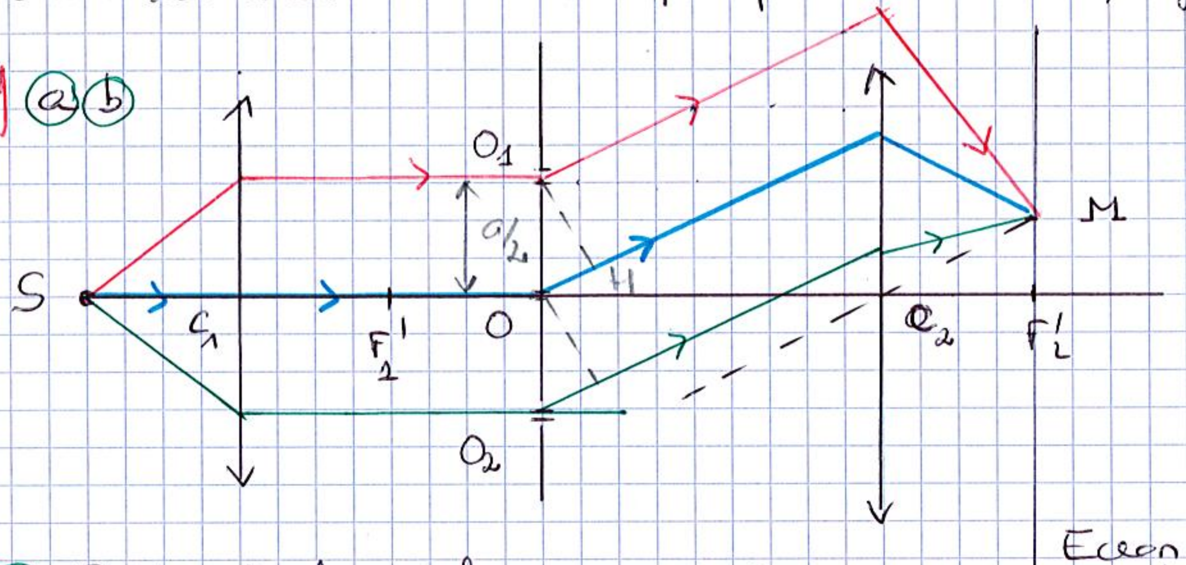
$k = \left\lfloor \dfrac{L_c}{\lambda_0} \right\rfloor$

22. f)

Source	λ_0 (nm)	$\Delta\lambda$ (nm)	τ (s)	L_c (m)	N
Laser.	632,991	0,001	$1{,}3\,10^{-9}$	0,401	$1{,}3\,10^{6}$
H	656,2	0,1	$14\,10^{-12}$	$4{,}3\,10^{-3}$	$1{,}3\,10^{4}$
Blanche	500	20	$4{,}2\,10^{-14}$	$1{,}2\,10^{-5}$	48.

Plus une source est monochromatique plus on voit de franges

26 4) a) b)



c) Soit $\Delta\varphi$ le déphasage entre 2 rayons successifs

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{a}{2}\sin\alpha \qquad \text{avec } \tan\alpha = \frac{x}{f'} \simeq \alpha$$

$$\text{Soit } \Delta\varphi = \frac{\pi a}{\lambda_0}\frac{x}{f'} = \varphi$$

On a $s(M) = s_1(M,t) + s_2(M,t) + s_0(M,t)$

avec s vibration lumineuse

En notation complexe

$$\underline{s}(M,t) = S_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)} + S_0 e^{j(\omega t + \varphi_0 - \Delta\varphi)} + S_0 e^{j(\omega t + \varphi_0 - 2\Delta\varphi)}$$

$$= S_0 e^{j\varphi_0} e^{j\omega t}\left(1 + e^{-j\Delta\varphi} + e^{-2j\Delta\varphi}\right)$$

$$= \underline{S_0} e^{j\omega t} \, 1 \, \frac{1 - e^{-3j\Delta\varphi}}{1 - e^{-j\Delta\varphi}}$$

$$= \underline{S_0} e^{j\omega t} \frac{e^{-\frac{3}{2}j\Delta\varphi}}{e^{-\frac{1}{2}j\Delta\varphi}} \frac{\sin 3/2\,\Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi/2}$$

On en déduit

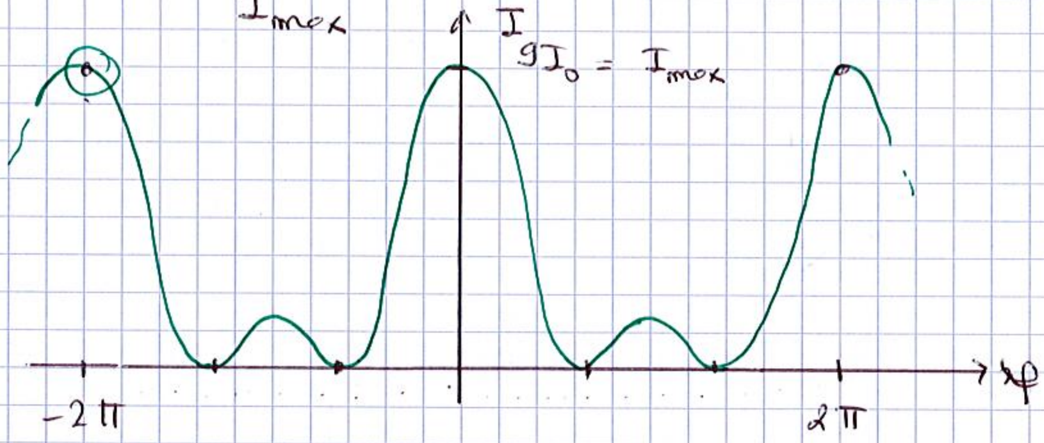
$$I(M) = \langle s^2(M,t) \rangle = I_0 \frac{\sin^2 \frac{3}{2}\Delta\varphi}{\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}$$

40

$$I(\varphi) = \underbrace{I_0 \, 9}_{I_{max}} \cdot \frac{\sin^2 3\varphi/2}{9 \sin^2 \varphi/2}$$

13

d)



$\sin \frac{3\varphi}{2} = 0 \iff \frac{3\varphi}{2} = p\pi \qquad \varphi = p\,\frac{2\pi}{3}$ pour $p = \pm 1$

ou $p = \pm 2$

e) $\lambda_0 = 633$ nm $\qquad \varphi = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$ pour $x_1 = 2,1$ mm

$$\iff \frac{\pi a x_1}{\lambda_0 f'} = 2\pi\left(\frac{4}{3}\right) \iff a = \frac{8 \lambda_0 f'}{3 x_1}$$

18.

$a = 0,40$ mm

4) c) Autre possibilité

$$s(M,t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + S_0 \cos(\omega t + \varphi_0 + \varphi) + S_0 \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi)$$

On prend $\varphi_0 = 0$

$$I(M,t) = \langle s^2(M,t) \rangle = S_0^2 \langle (\cos \omega t + \cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t - \varphi))^2 \rangle$$

$$= S_0^2 \langle \cos^2 \omega t + (\cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t - \varphi))^2 + 2 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) + 2 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) \rangle$$

$$= S_0^2 \langle \cos^2 \omega t + \cos^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t - \varphi) + 2 \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t - \varphi) + \dots \rangle$$

or $2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

$$= S_0^2 \langle \cos^2 \omega t + \cos^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t - \varphi) + \cos 2\omega t + \cos 2\varphi + \cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi \rangle$$

$$= S_0^2 \left(3 \times \frac{1}{2} + 2 \cos \varphi + \cos 2\varphi \right)$$

$$= \frac{3 I_0}{2} \left(1 + \frac{4}{3} \cos \varphi + \frac{2}{3} \cos 2\varphi \right)$$

18 # II - Interféromètre de Michelson CCP MP 2019 ⊕ autres

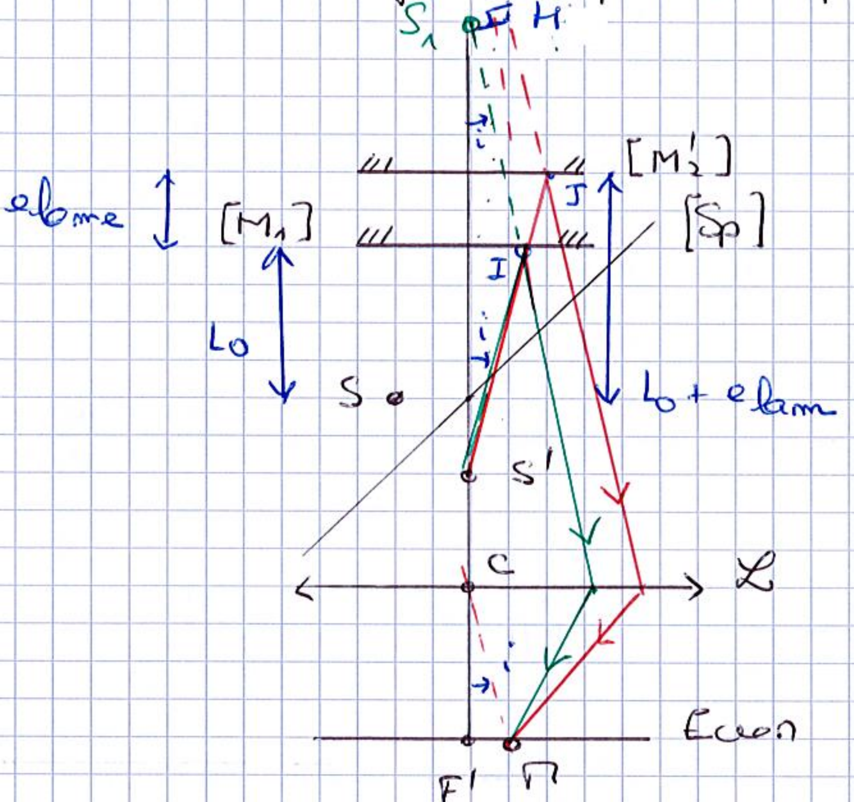
(50')

A - Description de l'appareil

5) Schéma équivalent au interféromètre replié

M'_2 = image de M_1 par la séparatrice

S' = image de S par la séparatrice



$S' \xrightarrow[M_1]{} S_1$

$S' \xrightarrow[M'_2]{} S_2$

Tout se passe comme si on avait une lame d'air d'épaisseur e_{lam} entre les miroirs M_1 et M'_2

26

6) $\delta(M) = (S'M)_{voie\,2} - (S'M)_{voie\,1}$ (définition de la différence de marche en M)

$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$ car $S'I = S_1I$ et $S'J = S_2J$

Si M point source alors S_1 et H appartiennent au même plan d'onde donc $(S_1M) = (HM)$

Il vient $\delta(M) = (S_2H)$

$= n_{air}\, 2e_{lame} \cos i$

car $S_1S_2 = 2e$ avec $n_{air} = 1{,}00$

$$\boxed{\delta(M) = 2e_{lame}\cos i}$$ OK

30

On a alors $\boxed{I(M) = 2\,\frac{I_0}{4}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\,\delta(M)\right)\right]}$.

Les franges d'interférence sont telles que

$\delta = cte \Leftrightarrow \cos i = cte$ soit $i = cte$

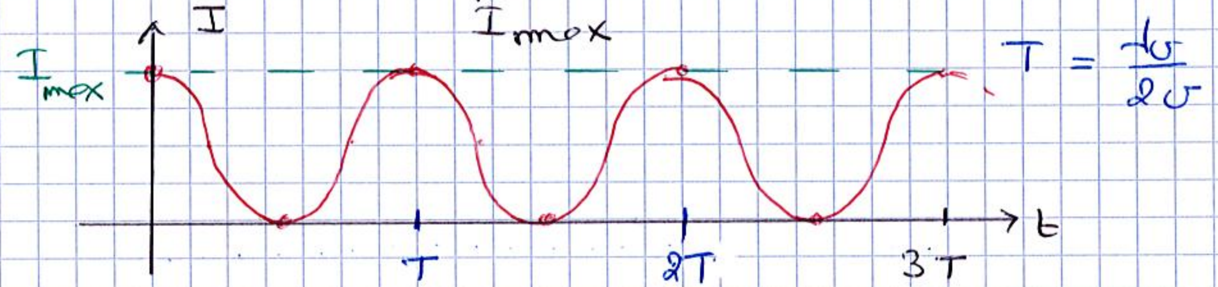
On a des cercles centrés sur F'

On parle d'anneaux d'égale inclinaison

32 7) ⓐ On a $i = 0$ en F' soit $\delta = 2e$

avec $e(t) = vt$

Il vient $I(t) = \underbrace{\frac{I_0}{2}}_{I_{max}}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\,2vt\right)\right]$



36 ⓑ Pour $t_1 = 5'$ $e_1 = v\,t_1$ $e_1 = 75\ \mu m$

Anneaux brillants $p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0}$ est entier

avec $\delta(M) = 2e\cos i$ et $\tan i = \frac{r}{f'}$

r = rayon du cercle

D'où $p(M) \simeq \frac{2e}{\lambda_0}\left(1 - \frac{r^2}{2f'^2}\right)$ (approximation des petits angles)

Pour $i = 0$ $p_0 = \frac{2e}{\lambda_0} \in \mathbb{N}$.

Pour le $N^{ième}$ anneau brillant $p_N = p_0 - N$

On veut $r < a$

soit $\frac{r^2}{2f'^2} < \frac{a^2}{2f'^2}$

$$1 - \frac{r'^2}{2f'^2} > 1 - \frac{a^2}{2f'^2}$$

$$(P_0 - N)\frac{1}{P_0} > 1 - \frac{a^2}{2f'^2}$$

Plus simple
$P_0 = \frac{2e}{\lambda_0}$ $P_0 = 277$

$P_{bord} = \frac{2e}{\lambda_0}\left(1 - \frac{(a/2)^2}{2f'^2}\right)$

$P_{bord} = 271,5$

$\Rightarrow$ 5 anneaux OK.

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{N}{P_0} > 1 - \frac{a^2}{2f'^2} \qquad N < P_0 \frac{a^2}{2f'^2}$$

$$N = \left\lfloor P_0 \frac{a^2}{2f'^2} \right\rfloor \qquad N = 5.$$

Pour $N = 3$ $\quad p = P_0 - 3$

$$= P_0 - P_0 \frac{R_3^2}{2f'^2}$$

46 $R_3^2 = \frac{6f'^2}{P_0}$ $\qquad$ $R_3 = 14,7$ cm

B Largeur spectrale

8) Les phénomènes qui contribuent à la largeur spectrales sont

- la durée finie de desexcitation des atomes
- l'effet Doppler
- les chocs entre atomes

48

9) Toutes les longueurs d'onde sont incohérentes
Pour une longueur d'onde donnée λ, on a

$$dI_\lambda(\Pi = F') = dI_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} 2vt\right)\right)$$

avec $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad dI_0 = \frac{J_0(\Delta\sigma_0)^2}{(\sigma - \sigma_0)^2 + (\Delta\sigma_0)^2} d\sigma$

51

42 On a alors

$$I(\delta) = \int dI = \int_0^{+\infty} \frac{J_0 (\Delta\sigma_0)^2}{(\sigma-\sigma_0)^2 + (\Delta\sigma_0)^2} (1+\cos(2\pi\sigma\delta))\, d\sigma$$

or $1/(\sigma-\sigma_0)^2 \simeq 0$ pour $\sigma<0$

$$= J_0 (\Delta\sigma_0)^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\sigma-\sigma_0)^2 + (\Delta\sigma_0)^2} d\sigma \right.$$

$$+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi\sigma\delta}{(\sigma-\sigma_0)^2 + \Delta\sigma_0^2} d\sigma}_{= \frac{\pi}{\Delta\sigma_0} \cos(2\pi\sigma_0\delta)\, e^{-2\pi|\delta|\Delta\sigma_0}}$$

et, si on pose $\tan x = \frac{\sigma - \sigma_0}{\Delta\sigma_0}$

on a $(1+\tan^2 x)\, dx = \frac{d\sigma}{\Delta\sigma_0}$

$$\frac{1}{\Delta\sigma_0^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta\sigma_0}{\cancel{\tan^2 x + 1}} \cancel{(1+\tan^2 x)}\, dx = \frac{1}{\Delta\sigma_0} \pi$$

D'où

$$I(\delta) = \pi J_0 \Delta\sigma_0 \left[1 + \cos(2\pi\sigma_0\delta)\, e^{-2\pi|\delta|\Delta\sigma_0} \right]$$

ok.

50 10) $I(\delta) = \frac{I(0)}{2}$ à $t_{1/2}$

$I(0) = \pi J_0 \Delta\sigma_0\, 2$

On a $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\pi\sigma_0\delta)\, e^{-2\pi|\delta|\Delta\sigma_0}\right)$

Enveloppes : $\mathcal{E}(\delta) = \pi J_0 \Delta\sigma_0 \left(1 \pm e^{-2\pi|\delta|\Delta\sigma_0}\right)$

D'où $e^{2\pi|\delta|\Delta\sigma_0} = 2$

$$|\delta| = \frac{1}{2\pi\Delta\sigma_0} \ln 2 = 2v t_{1/2}$$

or $\Delta\sigma_0 = \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0^2}$ $\qquad \Delta\lambda_0 = \frac{\lambda_0^2 \ln 2}{4\pi v t_{1/2}}$

11). AN : $t_{1/2} \simeq 300$ s

$\Delta\lambda_0 = 1\,10^{-10}$ m

$= 0{,}1$ nm.

L_c = longueur de cohérence $\qquad L_c = \dfrac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0}$

$$L_c = \frac{8\pi v\, t_{1/2}}{\ln 2} \qquad L_c = 2{,}7\ \text{mm}.$$

59