

Épreuve de physique I

Lundi 03 mars : 8h30 - 12h30

Instructions générales :

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Barème approximatif :

Partie I : 50%
Partie II : 50 %

Première partie

Nuisances sonores

Données

- Pression atmosphérique : $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa
- $\log x = \frac{\ln x}{\ln(10)}$
- Opérateurs en coordonnées cylindriques (r, θ, z) pour un champ scalaire U et un champ vectoriel $\vec{a} = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta + a_z \vec{u}_z$:

$$* \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$* \operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$* \operatorname{rot} \vec{a} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right] \vec{u}_r + \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_z$$

I. – Correction acoustique et théorie de la réverbération de Sabine

Afin d'assurer le confort acoustique des occupants d'une pièce d'habitation vis-à-vis des bruits qui lui sont propres, une solution consiste à recouvrir les parois de la pièce avec des matériaux absorbants appropriés. Cette méthode, appelée correction acoustique, permet d'optimiser selon l'usage de la pièce sa durée de réverbération liée à la multiplicité des échos sonores renvoyés par les parois.

On considère un fluide, caractérisé à l'équilibre par un champ des vitesses uniformément nul et des champs de pression et de masse volumique uniformes et stationnaires, notés respectivement p_0 et ρ_0 . Lorsque l'équilibre est rompu au passage d'une onde sonore se propageant selon l'axe (O, \vec{u}_x) , le fluide est alors caractérisé à l'instant t en tout point M d'abscisse x de l'écoulement supposé parfait par :

- un champ de pression $p(x, t) = p_0 + p_1(x, t)$ où la quantité p_1 est appelée surpression ou pression acoustique ;
- un champ de masse volumique $\rho(x, t) = \rho_0 + \rho_1(x, t)$;
- un champ des vitesses $\vec{v}(x, t) = \vec{0} + \vec{v}_1(x, t) = \vec{v}_1(x, t)$.

- Q1.** La propagation de la perturbation dans le fluide est traitée dans l'approximation acoustique. Préciser le cadre de cette approximation.
- Q2.** Rappeler l'équation d'Euler, limitée aux seules forces pressantes (effets de la pesanteur négligés en particulier). En déduire après linéarisation l'équation de couplage :

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

Établir de la même façon une seconde équation de couplage linéarisée à partir de l'équation locale de conservation de la masse.

- Q3.** Le fluide évolue de façon isentropique sous l'effet des ondes sonores. Montrer que $\rho_1 = \rho_0 \chi_{S,0} p_1$ où $\chi_{S,0}$ est le coefficient de compressibilité isentropique du fluide à l'équilibre. On rappelle que $\chi_S = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S$.
- Q4.** Déduire de l'ensemble des résultats précédents que la pression acoustique $p_1(x, t)$ obéit à une équation de d'Alembert. Donner l'expression de la célérité c des ondes sonores en fonction de $\chi_{S,0}$ et ρ_0 .

- Q5.** On suppose que le fluide évoluant de façon isentropique se comporte en outre comme un gaz parfait. Justifier que $p\rho^{-\gamma} = C^{ste}$ où γ est le rapport entre les capacités thermiques à pression et volume constants du fluide. En déduire que la célérité des ondes sonores s'écrit : $c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$.

L'onde est plane, progressive, sinusoïdale de pulsation ω , de la forme $p_1(x, t) = p_{1,m} \cos(\omega t - kx)$ pour la pression acoustique, avec $k = \frac{\omega}{c}$.

- Q6.** Déduire de l'une des équations de couplage établies à la **Q3**. l'expression du rapport $Z_c = \frac{p_1}{v_1}$, appelé impédance caractéristique du milieu, en fonction de ρ_0 et c . Que devient la relation entre p_1 et v_1 dans le cas d'une onde se propageant dans le sens inverse ?
- Q7.** La densité volumique d'énergie sonore $\langle e \rangle_T$ associée à l'onde s'écrit en moyenne sur une période T avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$: $\langle e \rangle_T = \frac{1}{2}\rho_0 \langle v_1^2 \rangle_T + \frac{1}{2}\chi_{S,0} \langle p_1^2 \rangle_T$.
Quelle est la signification physique de chacun des termes composant cette expression ? Exprimer $\langle e \rangle_T$ pour l'onde considérée en fonction de $p_{1,m}$, ρ_0 et c
- Q8.** On appelle intensité sonore I la grandeur définie par : $I = |\langle p_1 v_1 \rangle_T|$. Vérifier que cette grandeur est homogène à une puissance surfacique. Montrer que l'intensité sonore est proportionnelle à la densité volumique d'énergie sonore $\langle e \rangle_T$ pour l'onde considérée.

Le fluide est l'air d'une pièce d'habitation, au centre de laquelle se trouve une source sonore ponctuelle et isotrope, émettant de façon continue un son harmonique. En un point donné de la pièce, on distingue le champ direct dû à l'onde divergente émise par la source qui n'a pas encore rencontré d'obstacles, du champ réverbéré dû à l'ensemble des ondes ayant eu une ou plusieurs réflexion(s) sur les parois et les objets de la pièce. Dans la théorie de l'acousticien américain Sabine, la densité volumique d'énergie sonore du champ réverbéré $\langle e_r \rangle_T$ est supposée uniformément répartie dans toute la pièce à un instant donné. Dans ces conditions, on montre que l'intensité sonore correspondante s'écrit : $I_r = \frac{c \langle e \rangle_T}{4}$. On notera que I_r et $\langle e \rangle_T$ sont des quantités moyennées sur une période T de la source, mais sont susceptibles de varier sur une échelle de temps caractéristique τ beaucoup plus grande.

On néglige dans la suite l'absorption due à l'air, mais pas celle due aux parois et objets de la pièce. On note V le volume de la pièce, S la surface totale des parois et des objets de la pièce, α_m leur coefficient d'absorption moyen, défini comme le rapport entre la puissance sonore absorbée au niveau des parois et des objets et la puissance sonore incidente.

À l'instant $t = 0$, on coupe la source sonore. On se propose d'établir la loi de décroissance $I_r(t)$ de l'intensité sonore du champ réverbéré au cours du temps.

- Q9.** Exprimer la puissance sonore moyenne \mathcal{P}_a absorbée par les parois et les objets de la pièce en fonction de I_r , α_m et S . Exprimer de même l'énergie sonore moyenne $\mathcal{E}(t)$ dans la pièce à l'instant t en fonction de son volume V , I_r et c .
- Q10.** À l'aide d'un bilan d'énergie, montrer que l'intensité réverbérée $I_r(t)$ obéit à l'équation différentielle du premier ordre : $\frac{dI_r}{dt} + \frac{\alpha_m c S}{4V} I_r = 0$. Donner la loi d'évolution $I_r(t)$. On introduira un temps caractéristique τ et on notera $I_r(t = 0) = I_{r,0}$.

On définit le temps de réverbération T_r comme la durée nécessaire pour que le niveau d'intensité sonore L_I dans la pièce décroisse de 60 dB par rapport à son niveau initial, soit : $\Delta L_I = L_I(t = T_r) - L_I(t = 0) = -60$ dB. On rappelle que le niveau d'intensité sonore est défini par : $L_I = 10 \log \frac{I}{I_0}$ où $I_0 = 10^{-12}$ W·m⁻² est l'intensité sonore au seuil d'audibilité à 1 000 Hz.

- Q11.** Exprimer le temps de réverbération T_r en fonction de τ . Vérifier qu'on retrouve la formule semi-numérique de Sabine : $T_r = 0,16 \frac{V}{\alpha_m S}$ où le rapport V/S est exprimé en m et T_r en s. On prendra $c = 3,4 \cdot 10^2$ m·s⁻¹ (air à la température $T = 293$ K à l'équilibre).

On considère une salle vide, de longueur $L = 25$ m, de largeur $\ell = 20$ m, de hauteur $h = 10$ m, destinée à un concert de musique symphonique. Une mesure au sonomètre indique un temps de réverbération T_r à 1 000 Hz de 5,0 s, plus élevé que le temps de réverbération optimal $T_{r,opt}$ (**figure 7**).

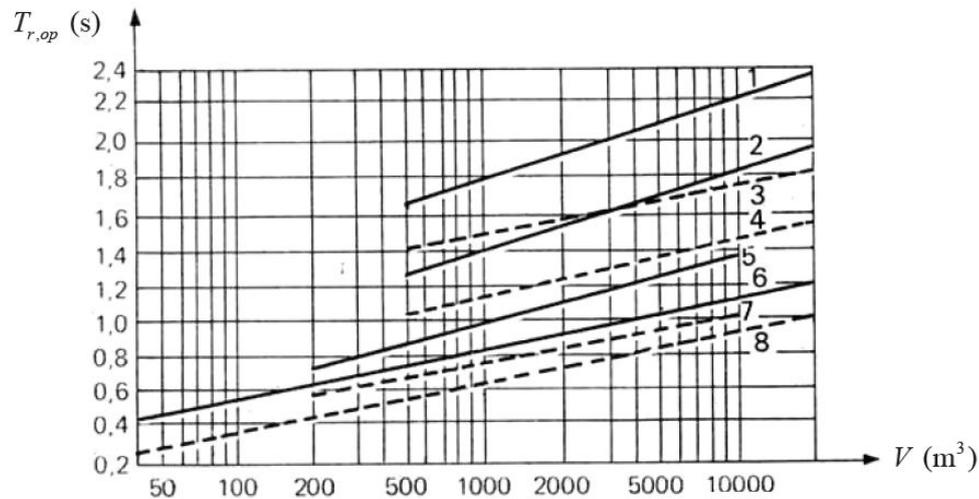


Figure 7 - Temps de réverbération optimal à 1 000 Hz en fonction du volume de la pièce

1. Orgue, audition directe. 2. Musique symphonique, audition directe. 3. Orgue, enregistrement.
4. Opéra, audition directe. 5. Jazz, audition directe. 6. Parole, audition directe. 7. Parole, enregistrement. 8. Variétés, enregistrement.

Source : L. Lamoral. Acoustique et architecture

Q12. Sachant que le coefficient d'absorption moyen $\alpha_{m,p}$ du public est égal à 0,90, justifier si la présence d'un public permet oui ou non une qualité d'écoute du concert satisfaisante.

Cette question fait appel à une démarche de résolution de problème. Il est notamment attendu de préciser chaque notation introduite, de présenter de façon claire les hypothèses retenues, de mener des calculs littéraux avant toute application numérique.

II. – Principe d'un silencieux à résonateur de Helmholtz

Si un traitement acoustique de la pièce ne peut être envisagé, d'autres solutions sont possibles pour réduire l'impact du bruit généré par un système de renouvellement d'air. L'une d'elles consiste à insérer des silencieux le long des réseaux de gaines, munis entre autres de résonateurs de Helmholtz. On modélise un résonateur de Helmholtz par une cavité de grand volume V_c , reliée à l'air libre par l'intermédiaire d'un col cylindrique horizontal d'axe (O, \vec{u}_x) , de très faible section s et de longueur ℓ (**figure 8**). Sous l'effet d'une perturbation, on considère que l'air situé dans le col oscille en bloc, à l'image d'un bouchon qui couliserait. On note $x(t)$ le déplacement du centre d'inertie de cette tranche d'air à l'instant t par rapport à sa position à l'équilibre, $p_c(t)$ la pression supposée uniforme dans la cavité, ρ_0 la masse volumique de l'air dans le col, supposée égale à tout instant à celle de l'air libre à la pression atmosphérique p_0 . On néglige tout phénomène dissipatif et on considère que l'air dans la cavité, de comportement supposé parfait, évolue de façon isentropique.

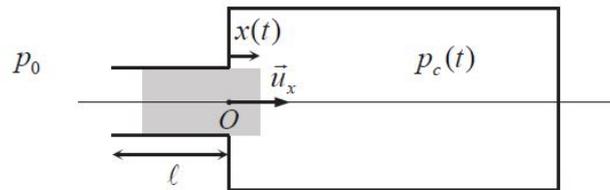


Figure 8 - Modélisation d'un résonateur de Helmholtz. La zone grisée représente la tranche d'air qui oscille

Q13. Exprimer la résultante \vec{F}_p des forces pressantes sur la tranche d'air en fonction de p_0 , $p_c(t)$ et s .

En supposant que le volume de la tranche d'air est très petit devant le volume de la cavité, soit $\ell s \ll V_c$, montrer que $p_c \simeq p_0 \left(1 + \frac{\gamma s x}{V_c} \right)$ au premier ordre, où γ est le rapport entre les capacités thermiques à pression et volume constants de l'air.

En déduire que la résultante des forces pressantes sur la tranche d'air est équivalente à une force de rappel élastique de raideur k : $\vec{F}_p = -kx\vec{u}_x$.

Exprimer k en fonction de V_c , s , ρ_0 et de la célérité c des ondes sonores dans l'air. On utilisera l'expression de c établie à la **Q5**.

Q14. Montrer que la tranche d'air dans le col oscille de façon harmonique. Vérifier que la fréquence propre

$$f_0 \text{ de ce système oscillant s'écrit : } f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c^2 s}{\ell V_c}}.$$

Un résonateur expérimental est constitué d'un cylindre en PVC de volume $V_c = 791 \text{ cm}^3$, fermé à ses deux extrémités. L'une de ces extrémités est percée de façon à insérer un col cylindrique de section $s = 1,89 \text{ cm}^2$ et de longueur $\ell = 5,0 \text{ cm}$. Un microphone de petite taille, relié à un oscilloscope à mémoire, est inséré dans le grand volume. En engageant légèrement l'index dans le col et en le retirant brusquement, on enregistre le signal suivant (figure 9). Les conditions de l'expérience sont telles que $c = 343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

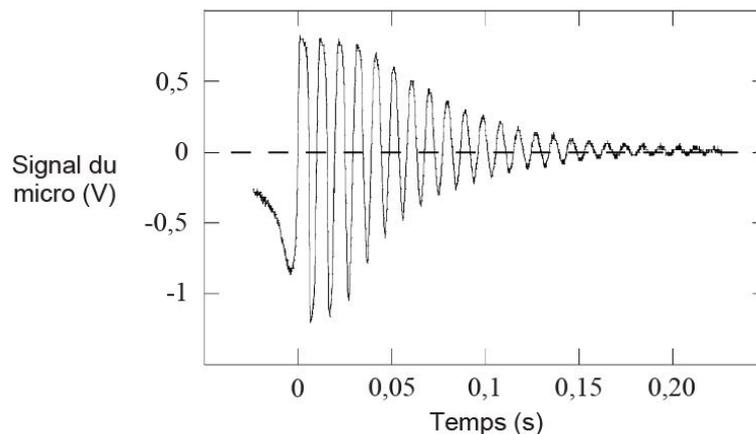


Figure 9 - Oscillations libres d'un résonateur de Helmholtz

Source : Bulletin de l'Union des Physiciens, volume 96, Juin 2002

Q15. Quelle serait la nature du signal attendu dans le cadre du modèle considéré dans les questions précédentes ? Comment expliquer la différence avec le signal enregistré ? Estimer le facteur de qualité Q du résonateur.

Q16. Le facteur de qualité est suffisamment grand pour considérer que le système oscille à sa fréquence propre f_0 . Comparer la valeur mesurée de cette fréquence à celle déduite du modèle utilisé.

En fait, les couches d'air situées de part et d'autre du col sont aussi entraînées dans le mouvement. Expliquer en quoi leur prise en compte permet d'affiner la modélisation.

Un haut-parleur, relié à un générateur basse fréquence, impose désormais à l'entrée du col une surpression variant de façon sinusoïdale à la pulsation ω , de la forme $p(t) = p_m \cos(\omega t)$. La pression à l'entrée du col est donc égale à $p_0 + p(t)$. On associe à cette pression acoustique la grandeur complexe $\underline{p}(t) = p_m e^{j\omega t}$ où $j^2 = -1$. On cherche une réponse de la tranche d'air de la forme $\underline{x}(t) = \underline{x}_m e^{j\omega t}$ en régime forcé en restant dans le cadre du modèle développé dans **Q13.** et **Q14.**

Q17. Établir l'expression de $\underline{x}(t)$. En déduire que la vitesse de la tranche d'air dans le col s'écrit en représentation complexe : $\underline{v}(t) = \underline{v}_m e^{j\omega t}$ où $\underline{v}_m = \frac{j\omega p_m}{\rho_0 \ell (\omega_0^2 - \omega^2)}$.

Que dire de $|\underline{v}_m|$ dans le cas où $\omega = \omega_0$? En pratique, $|\underline{v}_m|$ reste borné. Expliquer pourquoi.

Un résonateur de Helmholtz est maintenant connecté en $z = 0$ à une longue conduite cylindrique d'axe (O, \vec{u}_z) et de section $S \gg s$ (**figure 10**). La masse volumique de l'air au repos dans la conduite est ρ_0 .

Une onde acoustique incidente plane progressive sinusoïdale, de pulsation ω , se propage dans la conduite dans le sens des z croissants à la célérité c . Elle est caractérisée par sa pression acoustique $\underline{p}_i(z, t) = \underline{p}_{i,m} e^{j(\omega t - kz)}$. Du fait de la présence du résonateur en $z = 0$, elle donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise, caractérisées par leurs pressions acoustiques respectives $\underline{p}_r(z, t) = \underline{p}_{r,m} e^{j(\omega t + kz)}$ et $\underline{p}_t(z, t) = \underline{p}_{t,m} e^{j(\omega t - kz)}$.

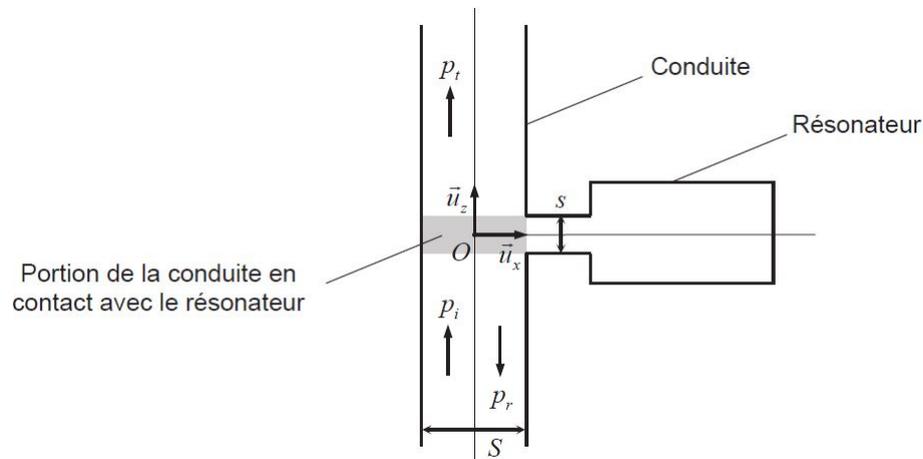


Figure 10 - Résonateur de Helmholtz connecté à une conduite

Q18. Exprimer les champs des vitesses caractérisant les ondes acoustiques incidente, réfléchie et transmise, notées respectivement $\underline{v}_i(z, t)$, $\underline{v}_r(z, t)$ et $\underline{v}_t(z, t)$, en fonction notamment de l'impédance caractéristique Z_c de la conduite définie à la **Q6.**

Q19. On note $\underline{p}(t) = p_m e^{j\omega t}$ la pression acoustique et $\underline{v}(t) = \underline{v}_m e^{j\omega t}$ le champ des vitesses correspondant en $z = 0$ à l'entrée du col du résonateur.

Exprimer p_m en fonction de $\underline{p}_{i,m}$ et $\underline{p}_{r,m}$, puis en fonction de $\underline{p}_{t,m}$.

En supposant la conservation du débit volumique à travers la surface qui délimite la portion de la conduite en contact avec le résonateur en $z = 0$ (**figure 10**), établir une relation entre $\underline{p}_{i,m}$, $\underline{p}_{r,m}$, $\underline{p}_{t,m}$, \underline{v}_m , S , s et Z_c .

Un calcul non demandé permet de déduire de l'ensemble des résultats établis précédemment que :

$$\underline{p}_{t,m} = \frac{\underline{p}_{i,m}}{1 - \frac{j}{2\beta\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}} \text{ avec } \beta = \frac{\ell S \omega}{sc}$$

Q20. Exprimer en fonction de ω , ω_0 et β l'indice de perte de transmission L_{TL} défini par $L_{TL} = 10 \log \left(\frac{|\underline{p}_{i,m}|^2}{|\underline{p}_{t,m}|^2} \right)$ et exprimé en décibels.

Il y a en fait toujours des phénomènes dissipatifs dus à la viscosité dans le col, phénomènes pouvant être renforcés par l'adjonction dans le col de matériaux poreux. Dans ces conditions, l'indice de perte de transmission est également fonction d'un coefficient d'amortissement adimensionné α (**figure 11**).

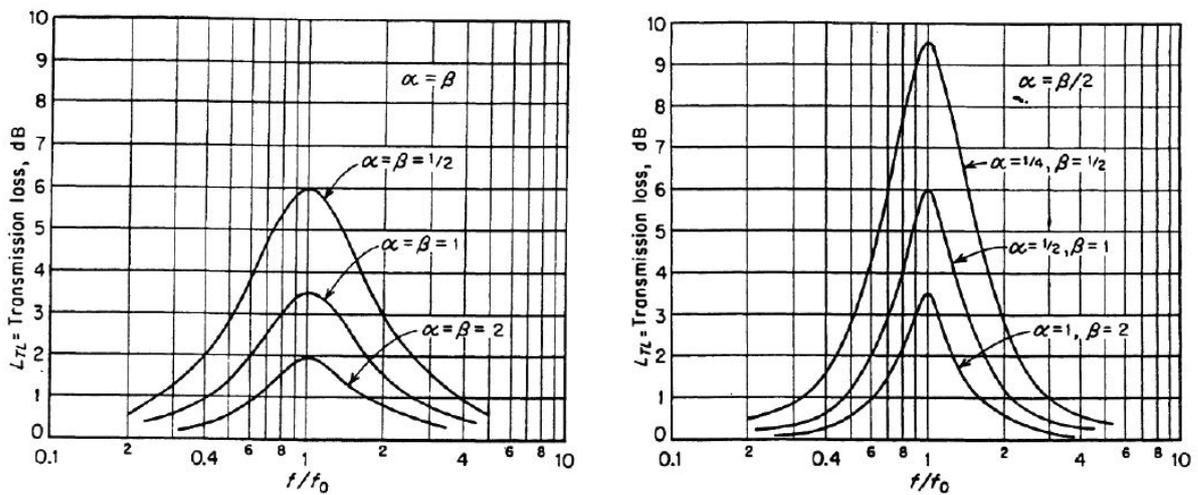


Figure 11 - Indice de perte de transmission autour de la fréquence de résonance f_0 pour différentes valeurs des coefficients α et β

Source : T.F.W. Embleton. Mufflers, in Noise and Vibration Control.

Q21. Identifier à l'aide des courbes de la **figure 11** la nature du filtre acoustique que constitue le résonateur de Helmholtz relié à la conduite. Pour une valeur du coefficient β donnée, expliquer à l'aide des courbes l'intérêt d'avoir un coefficient d'amortissement α important.

Deuxième partie

Transports planétaires

Ce problème étudie divers aspects physiques du voyage à l'échelle planétaire. Il est composé de deux parties indépendantes, la première envisage le déplacement d'un train dans un tunnel creusé dans la sphère terrestre, la seconde étudie la montée d'un ascenseur le long d'un câble vertical fixé à l'équateur. Dans tout le problème la Terre est assimilée à un corps sphérique homogène de rayon r_T , de centre O_T et de masse volumique homogène μ_T .

Pour les applications numériques on prendra $\mu_T = 5,50 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $r_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$, et on utilisera 3 chiffres significatifs. On rappelle la valeur de la constante universelle de la gravitation de Newton notée $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires \widehat{u}_x ou d'une flèche dans le cas général \overrightarrow{OP} . Une quantité surmontée d'un point désigne la dérivée totale par rapport au temps de cette quantité $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

I. – Le métro gravitationnel

Dans toute cette partie on néglige tous les effets de la rotation de la Terre sur elle-même et on se place dans le référentiel géocentrique que l'on supposera galiléen.

I. – A – Étude préliminaire

On considère un point P situé à l'intérieur de la sphère terrestre. On note $\overrightarrow{O_T P} = \vec{r} = r\widehat{u}_r$ et $\vec{g}(P)$ le champ gravitationnel créé par la terre en P .

- Q22.** a) Justifier que $\vec{g}(P)$ est porté par \widehat{u}_r et que son module ne dépend que de r , on notera donc $\vec{g}(P) = g(r)\widehat{u}_r$.
 b) En utilisant le théorème de Gauss gravitationnel déterminer l'expression de $g(r)$ en fonction de $\omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\mu_T$ et r .
- Q23.** Dédurre de la question précédente que la force de gravitation s'exerçant sur un point de masse m situé en P dérive de l'énergie potentielle

$$E_p(r) = E_{p0} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

où E_{p0} est une constante qui dépend de la référence choisie et que l'on ne demande pas d'explicitier. Quelle est la dimension de ω ?

I. – B – Le tunnel droit

On relie deux points A et B de l'équateur terrestre par un tunnel cylindrique traversant la Terre selon le schéma de la figure 1 qui présente également les notations utilisées.

On considère un mobile ponctuel P de masse m se déplaçant dans le tunnel sous l'effet du champ gravitationnel terrestre. La position du mobile est repérée sur le segment $[AB]$ par la coordonnée x telle que $\overrightarrow{HP} = x\widehat{u}_x$ où le vecteur unitaire \widehat{u}_x est colinéaire à \overrightarrow{AB} et de même sens et H est la projection orthogonale de O_T sur $[AB]$. On note finalement $h = O_T H$.

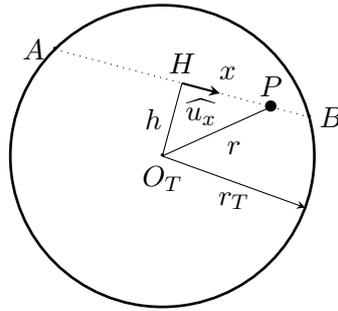


Fig. 1 - Le tunnel droit

Dans toute la partie B, on suppose que le point P reste en permanence dans l'axe du tunnel grâce à un système de confinement. Il n'y a donc pas de contact avec les parois et donc pas de frottement avec celles-ci. Un tel confinement est envisageable en utilisant des parois magnétiques! On suppose enfin qu'un vide suffisamment poussé a été créé dans le tunnel. Sous toutes ces hypothèses, on considérera que la force de guidage a une composante nulle selon \widehat{u}_x et que la seule autre force qui s'applique au mobile est la force de gravitation qu'exerce sur lui la Terre.

À l'instant $t = 0$, on abandonne le mobile au point A sans vitesse initiale.

- Q24.** Déterminer l'équation différentielle (linéaire) du second ordre vérifiée par $x(t)$. En déduire l'expression de $x(t)$ en fonction de h, r_T, ω et t .
- Q25.** Déterminer la valeur de la vitesse maximale atteinte par le point P sur le trajet. En quel point cette vitesse est-elle atteinte?
- Q26.** Exprimer la durée τ_0 du trajet entre AB et calculer sa valeur numérique.

I. – C – Projet de métro

Pour desservir plusieurs points sur l'équateur, on considère un système de tunnels représentés sur la figure 2.

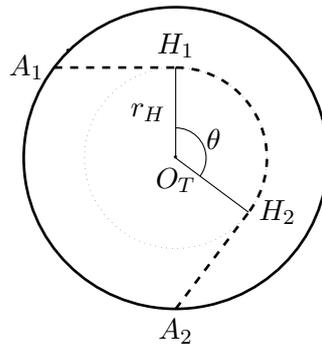


Fig. 2 - Le système de tunnels

Un tunnel circulaire est percé à une distance r_H du centre de la Terre dans le plan de l'équateur et l'on creuse des tunnels rectilignes de descente ou de remontée A_1H_1, A_2H_2 , etc ... Ces tunnels se raccordent au tunnel circulaire interne en des points H_1, H_2, \dots . Chaque jonction est tangentielle, c'est-à-dire que $\overrightarrow{A_1H_1} \cdot \overrightarrow{O_T H_1} = \overrightarrow{A_2H_2} \cdot \overrightarrow{O_T H_2} = \dots = 0$. Les points H_1, H_2, \dots sont équipés d'un système d'aiguillage assurant la continuité du vecteur vitesse de la rame de transport des voyageurs lors du transfert entre le tunnel de descente ou de remontée et le tunnel circulaire.

On assimile cette rame à un point matériel P de masse m astreint à circuler dans l'axe du tunnel et sans contact avec ses parois grâce au système de confinement. À l'instant $t = 0$, on laisse tomber une rame du point A_1 et sans vitesse initiale.

- Q27.** Quelle est la nature du mouvement de la rame sur le trajet circulaire interne H_1H_2 . Déterminer la vitesse de la rame sur cette portion, en déduire que la durée τ_1 du transfert de H_1 vers H_2 se met sous la forme

$$\tau_1 = \frac{\theta}{\omega} f(y)$$

où $y = r_T/r_H$ et f est une fonction que l'on déterminera.

- Q28.** Déterminer la durée totale τ du voyage de A_1 vers A_2 en fonction de θ, ω et y . Déterminer la valeur numérique de τ pour un voyage tel que $\theta = \pi/3$ avec $r_H = r_T/2$. Comparer les caractéristiques de ce voyage avec son équivalent à la surface de la terre.
- Q29.** Avec un diamètre moyen de 7 m, évaluer la quantité de déblais à évacuer pour creuser le tunnel circulaire, ainsi qu'un tunnel radial. Commenter le résultat obtenu.

L'une des nombreuses hypothèses nécessaires à la réalisation d'un tel projet est la création et le maintien d'un vide suffisant dans le tunnel. En fait, ce vide ne peut être que partiel sur un tel volume et le tunnel contient de l'air de densité volumique de masse ρ maintenu à la pression p et à la température ambiante. Ce dernier point serait à discuter dans le cadre d'une étude plus complète que nous ne mènerons pas ici. On supposera que p et ρ sont constantes dans l'enceinte du tunnel et que l'air s'y comporte comme un gaz parfait. Pour cette étude on se place dans le cas du mouvement dans le tunnel circulaire.

Des expériences d'aérodynamique montrent que le mouvement d'un solide dans un gaz au repos est soumis à une force de frottement, dite traînée. Cette traînée dépend de la taille caractéristique L et de la vitesse v du solide ainsi que de la densité ρ du gaz dans lequel s'effectue le mouvement.

- Q30.** En effectuant une analyse dimensionnelle, déterminer l'expression de cette force de frottement.
- Q31.** On note \mathcal{P} la puissance développée par la traînée subie par la rame de métro lorsqu'elle circule dans la portion circulaire du tunnel. Déterminer la pression qu'il faut maintenir dans le tunnel afin que \mathcal{P} soit comparable à la puissance que développe la force de traînée dans le cas d'une rame de TGV circulant à la vitesse de 360 km.h^{-1} à la surface de la terre. On supposera qu'en dehors de la vitesse la rame de métro et la rame de TGV possèdent les mêmes caractéristiques physiques. Commenter le résultat obtenu.

II. – Ascenseur spatial

Ce problème étudie certains aspects physiques de la réalisation d'une idée récurrente dans de nombreux contextes " l'ascenseur spatial " : il s'agit d'un mécanisme permettant de s'extraire du champ de pesanteur terrestre sans utiliser de fusée. On suppose pour cela qu'un câble réalisé par filage de nanotubes de carbone, de plus de 100 000 km de long, inextensible, a pu être dressé à la verticale d'un point de l'équateur de la Terre. Ce câble possède une masse linéique $\lambda = 1,00 \text{ kg.m}^{-1}$ extrêmement faible et une résistance mécanique extrêmement forte par rapport à un câble en acier, qui le rend capable de supporter de très fortes tensions sans casser. Dans cette partie, le référentiel terrestre est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles par rapport au référentiel géocentrique supposé galiléen. Il effectue un tour en un jour sidéral de durée $T_\sigma = 8,62.10^4 \text{ s}$. La Terre est toujours supposée sphérique et homogène de masse $m_T = \frac{4}{3}\pi r_T^3 \mu_T = 5,98.10^{24} \text{ kg}$.

II. – A – Étude de l'équilibre du câble

Les notations sont celles de la figure 3 : Le point d'ancrage E du câble est un point de l'équateur terrestre, r_T est le rayon de la Terre et O_T son centre. L'altitude d'un point M du fil est notée z , $r = r_T + z$ est le rayon $O_T M$ et h est la hauteur totale du câble. Le point H représente l'extrémité haute du câble : $z_H = h$ et $r_H = r_T + h$. Ce point est libre. On pourra enfin utiliser le vecteur unitaire $\hat{u}_r = \frac{\overrightarrow{O_T M}}{r}$.

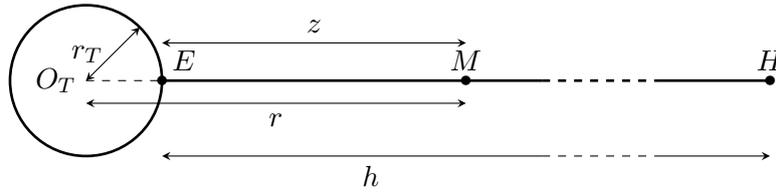


Fig. 3 - Vue générale de la Terre et du câble

- Q32.** a) Rappeler la définition de l'orbite géostationnaire terrestre.
 b) Établir l'expression littérale du rayon r_s correspondant à cette orbite en fonction de la masse m_T de la terre, de G et de la pulsation sidérale terrestre $\omega_\sigma = \frac{2\pi}{T_\sigma}$.

Dans toute la suite du problème, on considérera un câble de longueur totale $h = 4r_s - r_T$, on a donc $O_T H = r_H = 4r_s$. On note g_s le module du champ de gravitation en $r = r_s$, c'est-à-dire la quantité telle que $f_s = mg_s$ où f_s est le module de la force de gravitation subie par un corps de masse m situé en $r = r_s$. Enfin, on note g le module du champ de gravitation en $r = r_T$.

- Q33.** a) En écrivant que le câble est en équilibre (sur une longueur élémentaire de câble dr) dans le référentiel terrestre non galiléen, montrer que la dérivée de la tension du câble en M vérifie la relation

$$\frac{dT}{dr} = \chi \left[\frac{r_s^2}{r^2} - \frac{r}{r_s} \right]$$

où χ est un paramètre que l'on exprimera en fonction de λ et g_s .

b) En admettant que $T(r_H) = 0$, déterminer l'expression de la tension $T(r)$ en fonction de χ , r et r_s .

- Q34.** Déterminer les valeurs numériques de r_s , g_s , de la tension du fil au point d'ancrage notée $T_E = T(r_T)$, ainsi que la valeur maximale T_{max} de $T(r)$.

Commenter le résultat obtenu, on pourra par exemple se "servir" de la question Q?, on donne aussi le module d'Young de l'acier $\epsilon_a = 210$ GPa et d'un câble en nanotubes de carbone $\epsilon_c = 1$ TPa.

II. – B – Montée de la cage d'ascenseur le long du fil

Le système de propulsion de la cabine est modélisé sur la figure 4. La montée est assurée par la rotation en sens inverses de deux gros cylindres de caoutchouc identiques, chacun de rayon $R_c = 1,00$ m, de masse $m_c = 2,00 \cdot 10^3$ kg, de moment d'inertie par rapport à son axe $J = \frac{1}{2} m_c R_c^2$. Ces cylindres sont mûs par un moteur électrique exerçant sur chacun un couple. Le moment résultant de ce couple est $\vec{\Gamma}_g = +\Gamma_0 \widehat{u}_y$ pour le cylindre de gauche et $\vec{\Gamma}_d = -\Gamma_0 \widehat{u}_y$ pour le cylindre de droite. Les deux cylindres serrent le câble grâce à un ressort reliant leurs centres. La longueur à vide $\ell_0 = R_c$ et la constante de raideur k du ressort permettent d'assurer un roulement sans glissement au contact du câble. On prend $f_s = 0,5$ pour le coefficient de frottement statique entre le caoutchouc des cylindres et le câble. On néglige les masses de la cabine, de ses occupants et des moteurs par rapport à celle des cylindres.

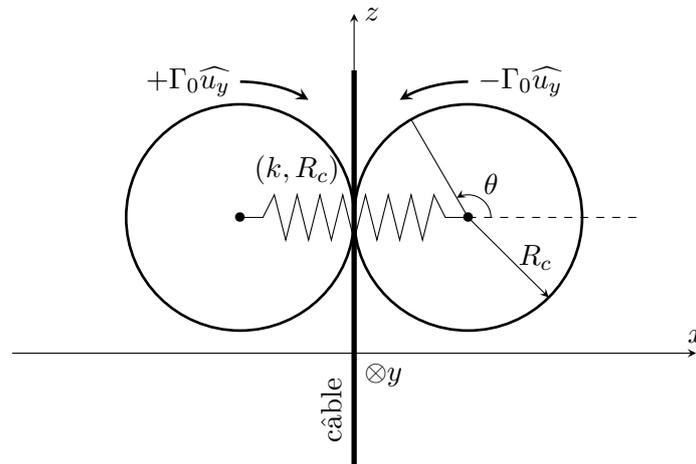


Fig. 4 - Vue générale des cylindres assurant la montée de la cabine

On négligera toute action de l'air (frottement et vent) sur le système.

Dans le référentiel terrestre auquel on associe le repère $(E, \widehat{u}_x, \widehat{u}_y, \widehat{u}_z)$ avec $\widehat{u}_z = \widehat{u}_r$, la cabine, repérée par le point M , est en E à $t = 0$. La montée de $z = 0$ (où la vitesse est nulle) à $z = h$ dure au total $t_m = 4$ jours et se décompose en une phase d'accélération constante d'intensité $a_0 = 1 \text{ m.s}^{-2}$ pendant une durée t_0 suivie d'une phase à vitesse constante de module v_0 .

- Q35.** Calculer les valeurs numériques de la durée t_0 , de la vitesse v_0 et de l'altitude z_0 atteintes à la fin de la première phase. On vérifiera que $z_0 \ll h$.
- Q36.** Justifier le fait que l'on puisse considérer que pendant la première phase, la force de gravitation exercée par la Terre sur le système est sensiblement constante. Dans toute la suite de cette partie, on suppose que le fil reste parfaitement immobile, vertical, tendu et on négligera la ou les forces susceptibles d'affecter la verticalité du fil.

L'angle de rotation du cylindre de droite est noté θ , compté positivement comme indiqué sur la figure 4, le vecteur vitesse angulaire de ce cylindre est donc $\vec{\Omega} = -\dot{\theta} \widehat{u}_y$. On prend $\theta = 0$ pour $z = 0$. La condition de roulement sans glissement entre les cylindres et le câble a pour expression :

$$z = R_c \theta$$

- Q37.** Dans le référentiel en translation rectiligne uniformément accéléré (a_0) par rapport au référentiel terrestre galiléen, faire un bilan des actions qui s'exercent sur le cylindre de droite.
- Q38.** Établir l'expression littérale du moment Γ_0 que doit exercer le moteur agissant sur ce cylindre pour assurer la montée pendant la première phase (accélérée) du mouvement en fonction de m_c, R_c, g et a_0 . Effectuer l'application numérique.
- Q39.** Donner l'expression littérale de la valeur minimale de la constante de raideur k du ressort assurant le roulement sans glissement du cylindre de droite sur le fil pendant la première phase (accélérée) du mouvement. Effectuer l'application numérique.
- Q40.** Justifier par un calcul numérique que la montée du système n'affecte pas sensiblement la tension du fil dans la première phase.

***** FIN DE L'ÉNONCÉ *****