

Meilleure note :

Moyenne :

Écart-type :

## Première partie

# Nuisances sonores

Extrait de CCINP PC 2023

Rapport du jury :

Q1. Question de cours peu réussie : les termes d'ordre 1 doivent être comparés à une référence. En particulier, le cadre de l'approximation acoustique impose que  $v \ll c$ .

Q2. et Q3. Si l'équation d'Euler est connue, elle est trop souvent mal écrite : oubli des flèches pour les grandeurs vectorielles, oubli des parenthèses pour l'opérateur  $(\vec{v} \cdot \text{grad})$ . Lorsque les résultats sont donnés, on ne doit pas se contenter d'écrire qu'on se limite aux termes d'ordre 1 ou simplement qu'on linéarise : tous les termes d'ordre 2 doivent être clairement identifiés. Q4. Question bien traitée.

Q5. La différentiation logarithmique est en général bien maîtrisée.

Q6. Question bien traitée, soit par dérivation/intégration explicite de la première équation de couplage, soit en passant par sa représentation complexe.

Q7. Il faut bien préciser que les deux termes sont des énergies volumiques.

Q8. L'obtention des unités dans le Système International de I ne suffit pas à conclure que cette grandeur est homogène à une puissance surfacique : il faut de même exprimer une puissance surfacique dans les unités du Système International pour comparer. Il est aussi efficace de voir que le produit d'une force par une vitesse est homogène à une puissance.

Q9. L'énoncé est souvent mal lu si bien que le facteur 4 est oublié.

Q10. Beaucoup de candidats se sont limités à la résolution de l'équation différentielle alors que le bilan d'énergie ne posait pas de difficultés.

Q11. Question bien traitée. Q12. Question très souvent évitée. Les rares candidats à y avoir réfléchi se sont souvent limités à des calculs de surface et volume.

Q13. L'expression de la résultante des forces pressantes est souvent correcte, mais la linéarisation de la loi de Laplace a été rarement bien menée.

Q14. Un nombre non négligeable de candidats sait estimer le facteur de qualité par le nombre d'oscillations visibles. Les phénomènes dissipatifs ne sont pas toujours évoqués.

Q15. D'étonnantes erreurs pour la mesure de la période à partir du graphe. L'allongement de la couche d'air pour expliquer l'écart entre l'expérience et le modèle a été rarement compris.

Q16. Question peu abordée. Q17. Question bien traitée : les candidats pensent souvent au signe moins pour l'onde réfléchie. Q18. L'équation déduite de la conservation du débit volumique n'a quasiment jamais été trouvée sans erreurs. Q19. Question peu traitée, et quand elle l'est, il n'est pas rare de voir des modules avec un signe négatif. Q20. La plupart des candidats se sont fait piéger en voyant un filtre passe-bande : s'agissant d'une perte de transmission en ordonnée, le filtre est un coupe-bande.

## Nuisances sonores

### I - Correction acoustique et théorie de Sabine

Q1) Dans le cadre de l'approximation acoustique

$$\frac{|p_1|}{p_0} \ll 1 ; \quad \frac{|v_1|}{c} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{\|\vec{v}_1\|}{c} \ll 1$$

avec  $c$  = célérité des ondes sonores dans le fluide

Q2) Equation d'Euler :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = - \text{grad } p$$

(pression négligée)

Soit

$$(\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\rho_0 + \rho_1) (\vec{v}_1 \cdot \text{grad}) \vec{v}_1 = - \text{grad} (\rho_0 + p_1)$$

(ordre 2)

A l'ordre 1

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \text{grad } p_1$$

Selon  $\vec{u}_x$

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (\text{OK})$$

Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Soit

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}((\rho_0 + \rho_1) \vec{v}_1) = 0$$

(ordre 1)

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{v}_1 = 0$$

avec  $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_x$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$$

Q3) Par définition  $\chi_{s,0} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s$

avec  $\rho = \rho_0 + \rho_1$  et  $p = p_0 + p_1$

Soit  $\chi_{s,0} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{\rho_1}{p_1}$

A l'ordre 1.  $\rho_1 = \rho_0 \chi_{s,0} p_1$  (OK)

Q4) On a

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x} \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} = - \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ p_1 = \rho_0 \chi_{s,0} p_1 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x} & (1) \\ \chi_{s,0} \frac{\partial p_1}{\partial t} = - \frac{\partial v_1}{\partial x} & (2) \end{cases}$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(1)}{\partial x} \neq \frac{\partial(2)}{\partial t} \rightarrow \chi_{s,0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$

car  $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x}$

Il vient  $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \rho_0 \chi_{s,0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad \text{Eq. de d'Alembert}$$

avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_{s,0}}}$

Q5) On étudie un gaz parfait évoluant de manière adiabatique réversible. On peut exploiter les lois de Laplace -  
Pour un système fermé  $pV^\gamma = \text{cte}$   
or  $m = \text{cte} = \rho V$

D'où  $\rho \rho^{-\delta} = \text{cte}$  (OK)

On a  $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0} \chi_{s,0}}$  avec  $\chi_{s,0} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s$

Or  $\rho^{-\delta} + \rho (-\delta) \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \rho^{-\delta-1} = 0$

$\Rightarrow \rho^{-\delta} = \delta \rho \rho^{-\delta-1} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s$   
 $= \delta \rho \rho^{-\delta} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s$

On peut aussi différencier

$\frac{d\rho}{\rho} - \delta \frac{d\rho}{\rho} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{\delta \rho} \left\{ \chi_{s,0} = \frac{1}{\delta \rho} \right.$  avec  $p = p_0 + p_1$

D'où  $c = \sqrt{\frac{\delta \rho_0}{\rho_0}}$  (OK)

Q6] On a  $\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$   
 $= -k p_{1,m} \sin(\omega t - kx)$

Soit  $v_1(x, t) = \frac{k}{\rho_0 \omega} p_{1,m} \cos(\omega t - kx) + f(x)$   
 car  $\langle v_1 \rangle_t = 0$ .

avec  $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$

On a alors  $Z_c = \frac{p_1}{v_1} = \frac{p_{1,m} \cos(\omega t - kx)}{\frac{1}{\rho_0 c} p_{1,m} \cos(\omega t - kx)}$

$Z_c = \rho_0 c$

Si l'onde se propage selon  $\vec{e}_x \Rightarrow Z_c = -\rho_0 c$

Q7] On a  $\langle e \rangle_T = \frac{1}{2} \rho_0 \langle v_1^2 \rangle_T + \frac{1}{2} \chi_{s,0} \langle p_1^2 \rangle_T$

d'énergie cinétique moyenne d'énergie potentielle osillante

$\langle e \rangle_T = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{P_{1,m}^2}{\rho_0^2 c^2} \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle_T + \frac{1}{2} \chi_{s,0} P_{1,m}^2 \times \frac{1}{2}$

$= P_{1,m}^2 \left[ \frac{1}{4} \frac{1}{\rho_0} \chi_{s,0} + \frac{1}{4} \chi_{s,0} \right]$

$\langle e \rangle_T = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0 c^2} P_{1,m}^2$

Q8] On a  $I = | \langle p_1 v_1 \rangle_T |$

$[I] = [p_1] \cdot [v_1]$

$= \frac{[\text{force}]}{L^2} \cdot L T^{-1} = \frac{[\text{force}][\text{intense}]}{L^2}$

$= M L T^{-2} \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$

$= N T^{-3}$

$= \frac{[\text{pression}]}{[\text{surface}]}$  (OK)

$I = \left| \langle p_{1,m} \cos^2(\omega t - kx) \cdot \frac{p_{1,m}}{\rho_0 c} \rangle \right|$

$I = \frac{1}{2} \frac{P_{1,m}^2}{\rho_0 c} = c \langle e \rangle_T$

I est proportionnelle à  $\langle e \rangle_T$

19 Q9 Soit  $P_a$  puissance sonore moyenne absorbée par les parois de la pièce

$$\alpha_m = \frac{P_a}{P_I} \quad \text{avec} \quad P_I = I_r S$$

$$\text{D'où} \quad P_a = \alpha_m P_I = \alpha_m I_r S$$

Soit  $\mathcal{E}(t)$  l'énergie sonore moyenne dans la pièce  
 $\mathcal{E}(t) = \langle e \rangle_T \cdot V$  avec  $\langle e \rangle_T = \frac{4 I_r}{c}$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{4V}{c} I_r(t)$$

20 Q10 Entre  $t$  et  $t+dt$  l'énergie de la pièce varie de  $d\mathcal{E} = \mathcal{E}(t+dt) - \mathcal{E}(t)$  car de l'énergie est absorbée par les parois et objets

On a  $d\mathcal{E} = -P_a dt$

$$\text{Soit} \quad \frac{4V}{c} dI_r = -\alpha_m S I_r dt$$

$$\frac{dI_r}{dt} + \frac{\alpha_m c S}{4V} I_r = 0$$

OK

On a alors  $I_r(t) = A e^{-t/\tau}$  avec  $\tau = \frac{4V}{\alpha_m c S}$

et  $I_r(0) = I_{r0} = A$

$$I_r(t) = I_{r0} e^{-t/\tau}$$

21 Q11  $T_r$  est tel que

$$\Delta L_I = L_I(T_r) - L_I(0) = -60 \text{ dB}$$

$$\text{avec} \quad L_I = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad \Delta L_I &= 10 \log \frac{I(T_r)}{I(0)} \\ &= 10 \log \frac{e^{-T_r/\tau}}{1} \\ &= 10 \frac{\ln e^{-T_r/\tau}}{\ln 10} = -\frac{T_r}{\tau} \frac{10}{\ln 10} = -60 \end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad T_r = \tau \cdot 6 \ln 10$$

$$\text{Formule de Sabine} \quad T_r = 0,16 \frac{V}{\alpha_m S}$$

$$\text{On a} \quad \tau = \frac{4V}{\alpha_m c S}$$

$$\begin{aligned} \text{On a obtenu} \quad T_r &= \frac{4V}{\alpha_m c S} \cdot 6 \ln 10 \\ &= \frac{V}{\alpha_m S} \cdot \frac{24 \ln 10}{c} \\ &= 0,16 \end{aligned}$$

OK

30 Q12 On a  $V = 25 \times 20 \times 10 = 5,0 \cdot 10^3 \text{ m}^3$

Il faudrait  $T_r \in [0,8 - 2,1] / \text{et} S = 1,9 \cdot 10^3 \text{ m}^2$

Pour la musique symphonique  $T_{r,op} = 1,7 \text{ s}$

On a donc  $T_{r,ide} = 6,7 \text{ s}$

et  $\alpha_m = 6,3 \cdot 10^{-2}$

Donc  $T_r$  diminue avec les spectateurs

Calcul de  $T_{r,op}$ : on utilise la formule de Sabine avec

$$\alpha_m (2hL + 2hL_1 + L_2) + \alpha_{m,op} Lh$$

le 2nd est remplacé par les spectateurs

AN  $T_{r,op} = 1,5 \text{ s}$  C'est un peu en dessous mais les spectateurs occupent pas toute la surface au sol.

## II. Principe d'un silencieux à résonateur de Helmholtz

Q13) Soit  $\vec{F}_p$  la résultante de forces pressantes sur la tranche d'air

$$\vec{F}_p = +p_0 \Delta \vec{e}_x - p_c(t) \Delta \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_p = (p_0 - p_c(t)) \Delta \vec{e}_x$$

$\Sigma$  = Gaz dans la cavité (système fermé)

Ce système GP évolue de manière isentropique

D'après les lois de Laplace

$$p_c(t) V_c(t)^\gamma = cte = p_0 V_c^\gamma$$

avec  $V_c(t) = V_c - x \Delta$

et  $V_c$  correspond à  $p_c = p_0$

$$D'où \quad p_c(t) = p_0 \left( \frac{V_c}{V_c - x \Delta} \right)^\gamma$$

$$= p_0 \left( 1 + \frac{x \Delta}{V_c} \right)^{-\gamma}$$

$$p_c(t) \approx p_0 \left( 1 + \frac{\gamma x \Delta}{V_c} \right) \quad \text{ok}$$

On a alors

$$\vec{F}_p = \left( p_0 - p_0 \left( 1 + \frac{\gamma x \Delta}{V_c} \right) \right) \Delta \vec{e}_x$$

$$= -p_0 \frac{\gamma \Delta^2}{V_c} x \vec{e}_x$$

$$= -k x \vec{e}_x$$

avec  $k = \frac{\gamma \Delta^2 p_0}{V_c}$  et  $c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}}$

$$k = \frac{\rho c^2 \Delta^2}{V_c}$$

11 Q14) Théorème de la résultante cinétique pour la bouchon de gaz selon  $\vec{e}_x$

$$p_0 \Delta \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{p_0 \Delta} x = 0 \quad \text{Eq. diff d'un oscillateur harmonique}$$

Pour pose  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{p_0 \Delta}} = 2\pi f_0$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c^2 \rho \Delta^2}{V_c \Delta p_0}} \quad \boxed{f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\Delta}{V_c \rho}} \quad \text{ok}}$$

Q15) On s'attendait à un signal sinusoïdal.

On observe des oscillations amorties. Il y a de la dissipation.

$$N = 17 \quad (\text{nombre d'oscillations observées})$$

12 Q16) D'après le graphique  $T_0 = \frac{0,15}{15,5} = 9,68 \text{ ms}$   
soit  $f_0 = 103 \text{ Hz}$

D'après la formule de Q15  $f_0 = 119 \text{ Hz}$

Ces valeurs sont proches.  $\frac{\Delta f_0}{f_0} = 15\%$  d'erreur

Avec la phase croissante mais  $\oplus$  non  $\Rightarrow f_{\text{exp}} < f_{\text{th}}$  ok

Q17) On étudie le régime sinusoïdal forcé avec

$$\vec{F}_p(t) = (p_0 + p(t) - p_c(t)) \Delta \vec{e}_x$$

$$= p_0 + p_0 \gamma \frac{x \Delta}{V_c}$$

$$\vec{F}_p(t) = (p(t) - k x) \vec{e}_x$$

Pour le système tronche d'air on a donc

$$\rho_0 l \Delta \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + p(t) \Delta$$

Avec les notations complexes

$$\rho_0 l \Delta (j\omega)^2 \underline{x} = -k \underline{x} + \Delta p$$

$$\underline{x} = \Delta \frac{p}{k - \rho_0 l \omega^2}$$

$$\underline{x}(t) = \frac{\Delta P_m}{k - \rho_0 l \omega^2} e^{j\omega t}$$

Et  $\underline{v}(t) = j\omega \underline{x}(t)$

$$\underline{v}(t) = j\omega \frac{\Delta P_m}{k - \rho_0 l \omega^2} e^{j\omega t}$$

$$= \frac{\Delta j\omega P_m}{\rho_0 l (\omega_0^2 - \omega^2)} e^{j\omega t}$$

$$\underline{v}(t) = \frac{j\omega P_m}{\rho_0 l (\omega_0^2 - \omega^2)} e^{j\omega t} \quad (\text{ok})$$

$$= \underline{v}_m$$

$|\underline{v}_m|$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\omega = \omega_0$ .

En pratique la dissipation limite cette résonance

36

Q18) Par définition de  $Z_c$

$$\underline{v}_i(z, t) = \frac{P_{i,m}}{Z_c} e^{j(\omega t - kz)}$$

$$\underline{v}_r(z, t) = -\frac{P_{r,m}}{Z_c} e^{j(\omega t + kz)}$$

$$\underline{v}_T(z, t) = +\frac{P_{T,m}}{Z_c} e^{j(\omega t - kz)}$$

Q19) Il y a continuité de la pression en  $z=0$   
D'où

$$p(t) = p_i(0, t) + p_r(0, t)$$

$$= p_T(0, t)$$

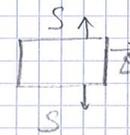
On en déduit

$$P_m = P_{i,m} + P_{r,m}$$

$$= P_{T,m}$$

Il y a conservation du débit volumique

$$\Rightarrow -(\underline{v}_{i,m}(0, t) + \underline{v}_{r,m}(0, t))S + \underline{v}_{T,m}(0, t)S$$



$$+ \underline{v}_m \Delta = 0$$

D'où

$$\frac{P_{T,m}}{Z_c} + \frac{\Delta}{S} \underline{v}_m = \frac{P_{i,m}}{Z_c} - \frac{P_{r,m}}{Z_c}$$

Q20) On obtient  $P_{T,m} = P_{i,m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{j}{2\beta(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}}$

avec  $\beta = \frac{lS\omega}{\Delta c}$

Q6)  $L_{TL}$  = indice de perte par transmission

$$L_{TL} = 20 \log \frac{|P_{i,m}|^2}{|P_{T,m}|^2}$$

$$= 20 \log \left| 1 - \frac{j}{2\beta(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \right|$$

$$L_{TL} = 20 \log \left( 1 + \frac{1}{4\beta^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2} \right)$$

## Deuxième partie

## Transports planétaires

## I Le métro gravitationnel

## A. Étude préliminaire

Q22. a) Source de  $\vec{g}$  : masse de la Terre (via la masse volumique).

Le Terre est un corps sphérique homogène. Tout plan contenant le point  $P$  et le centre  $O_T$  de la Terre est plan de symétrie pour la distribution de masse de la Terre;  $\vec{g}(P)$  doit appartenir à tous ces plans, donc être porté par  $\vec{u}_r$ .

L'invariance par rotation autour de  $O_T$  de la distribution de masse de la Terre implique que son module ne dépend que de  $r$ , on a donc

$$\vec{g}(P) = g(r)\vec{u}_r$$

b) En appliquant le théorème de Gauss gravitationnel à une sphère  $\Sigma$  de centre  $O_T$  et de rayon  $r$ , on a

$$\oiint_{\Sigma} \vec{g} \cdot \vec{n} dS = -4\pi GM_{int}(r)$$

où  $M_{int}(r) = \frac{4}{3}\pi\mu_T r^3$  représente la masse localisée à l'intérieur de  $\Sigma$ . En explicitant l'intégrale de flux, on obtient

$$\oiint_{\Sigma} \vec{g} \cdot \vec{n} dS = 4\pi r^2 g(r)$$

soit

$$g(r) = \frac{-4\pi G}{4\pi r^2} \frac{4}{3}\pi\mu_T r^3 = -\frac{4}{3}\pi G\mu_T r = -r\omega^2$$

$$g(r) = -r\omega^2$$

avec  $\omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\mu_T$ .

Q23. La force de gravitation s'exerçant sur un point de masse  $m$  situé en  $P$  est

$$\vec{F}_g = mg(r)\vec{u}_r = -mr\omega^2\vec{u}_r$$

qui dérive de l'énergie potentielle  $E_p$  telle que  $\vec{F}_g = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ . On en déduit que  $-\frac{dE_p}{dr} = -m\omega^2 r$  et

$$E_p(r) = E_{p0} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

$\omega$  est homogène à l'inverse d'un temps.

## B. Le tunnel droit

Q24. Système étudié : point matériel  $P$ ;

Référentiel d'étude géocentrique galiléen;

Bilan des forces : la force de gravitation  $\vec{F}$  et une force de guidage  $\vec{F}_G$  perpendiculaire au tunnel.

D'après la seconde loi de Newton :  $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_G$ .

Avec  $\overrightarrow{HP} = x\widehat{u}_x$ ;  $\vec{v} = \dot{x}\widehat{u}_x$ ,  $\vec{a} = \ddot{x}\widehat{u}_x$  et  $\vec{F} = -m\omega^2 r\widehat{u}_r = -m\omega^2 \overrightarrow{O_T H} - m\omega^2 x\widehat{u}_x$

Selon  $\widehat{u}_x$  on obtient :  $m\ddot{x} = -m\omega^2 x$ .

Autre méthode :

La puissance des forces de confinement étant nulle, il y a conservation de l'énergie mécanique. On a donc

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_{p0} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = E_{p0} + \frac{1}{2}m\omega^2 r_T^2$$

soit, en remarquant que  $r^2 = x^2 + h^2$  :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 (r_T^2 - h^2)$$

On obtient l'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $x(t)$  en dérivant par rapport au temps soit, en éliminant la solution parasite  $\dot{x} = 0$  :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

La solution générale est de la forme :

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

soit, compte tenu des conditions initiales ( $x(0) = -\sqrt{r_T^2 - h^2}$  et  $\dot{x}(0) = 0$ ) :

$$x(t) = -\sqrt{r_T^2 - h^2} \cos \omega t$$

Q25. La vitesse maximale atteinte par le point  $P$  sur le trajet est atteinte en  $H$  ; elle vaut

$$v_{max} = \omega \sqrt{r_T^2 - h^2}$$

Q26. La durée  $\tau_0$  du trajet entre  $AB$  est égale à la moitié de la période :

$$\tau_0 = \frac{\pi}{\omega}$$

AN :  $\tau_0 = 2,53 \cdot 10^3$  s = 42 min 10 s

## C. Projet de métro

Q27. Sur le trajet circulaire interne  $H_1 H_2$ , le mouvement est circulaire donc  $r = \text{cste}$  et l'énergie potentielle est aussi constante. Or le mouvement est à énergie mécanique constante, l'énergie cinétique de  $P$  est donc constante. Le mouvement est **circulaire uniforme**.

La vitesse de la rame sur cette portion est égale à la vitesse  $v_1$  acquise dans le tunnel de descente au point de raccordement  $H_1$ . La conservation de l'énergie dans le trajet  $AH_1$  donne

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (r_T^2 - r_H^2) \text{ soit } v_1 = \omega \sqrt{r_T^2 - r_H^2}$$

La durée du transfert de  $H_1$  vers  $H_2$  est donc

$$\tau_1 = \frac{r_H \theta}{v_1} = \frac{r_H \theta}{\omega \sqrt{r_T^2 - r_H^2}} = \frac{\theta}{\omega \sqrt{(r_T/r_H)^2 - 1}}$$

Elle se met sous la forme

$$\tau_1 = \frac{\theta}{\omega} f(y)$$

où  $y = r_T/r_H$  et  $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$ .

Q28. La durée totale  $\tau$  du voyage de  $A_1$  vers  $A_2$  est  $\tau_1 + 2\tau_2$ , où  $\tau_2$  est la durée du voyage de  $A_1$  à  $H_1$ . On remarque que  $\tau_2$  est la moitié de la durée du voyage de  $A$  à  $B$  pour  $h = r_H$ , soit

$$\tau_2 = \frac{\pi}{2\omega}$$

On a donc

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} + \frac{\theta}{\omega \sqrt{y^2 - 1}}$$

Pour un voyage tel que  $\theta = \pi/3$  avec  $r_H = r_T/2$ , on obtient

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} \left( 1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) = 3,02 \cdot 10^3 \text{ s}$$

La durée est inférieure à une heure. C'est plus rapide que l'avion.

Q29. La longueur du tunnel circulaire est  $\pi r_T$  ; un tunnel radial allant de la surface au tunnel circulaire a une longueur  $r_T/2$ . Le volume de déblais à évacuer est

$$V = \frac{\pi D^2 r_T}{4} \left( \pi + \frac{1}{2} \right) = 8,94 \cdot 10^8 \text{ m}^3$$

La masse correspondante est de l'ordre de 5 milliards de tonnes ; il faudrait plus de 100 millions de camions pour évacuer ces déblais !

Q30. Si on cherche une loi de la forme

$$F_t = k L^\alpha V^\beta \rho^\gamma$$

où  $k$  est une constante adimensionnée, on doit avoir

$$MLT^{-2} = L^\alpha [LT^{-1}]^\beta [ML^{-3}]^\gamma = M^\gamma L^{\alpha - \beta - 3\gamma} T^{-\alpha}$$

Les exposants sont donc tels que

$$\begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha - \beta - 2\gamma = 1 \\ -\alpha = -2 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

On obtient une loi de la forme

$$F_t = k\rho L^2 V^2$$

Q31. Pour  $r_H = r_T/2$ , la vitesse dans le tunnel circulaire est

$$v_1 = \omega r_T \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \omega r_T \frac{\sqrt{3}}{2} = 6,86 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

Pour que  $\mathcal{P} = F_t v_1$  soit comparable à la puissance que développe la force de traînée dans le cas d'une rame de TGV circulant à la vitesse de  $v_0 = 360 \text{ km.h}^{-1}$ , il faut une pression

$$p_1 = p_0 \left( \frac{v_0}{v_1} \right)^3 = 0,3 \text{ Pa} \ll p_0$$

Il faut une pression extrêmement faible !

## II Ascenseur spatial

### A. Étude de l'équilibre du câble

Q32. a) L'orbite géostationnaire terrestre est l'orbite circulaire d'un satellite pour laquelle la période du mouvement est égale à  $\frac{2\pi}{\omega_\sigma}$ .

b) En écrivant le théorème de la résultante cinétique pour le satellite en mouvement circulaire uniforme, soumis uniquement à l'interaction gravitationnelle terrestre, on a

$$-m_{sat} r_s \omega_\sigma^2 \vec{u}_r = -G \frac{m_{sat} m_T}{r_s^2} \vec{u}_r$$

soit

$$r_s = \left( \frac{G m_T}{\omega_\sigma^2} \right)^{1/3}$$

Q33. a) Un tronçon de câble  $[r, r + dr]$  est soumis à :

- la force gravitationnelle  $\lambda dr g(r) \vec{u}_r = -\lambda dr g_s \frac{r_s^2}{r^2} \vec{u}_r$  ;
- aux forces de contact  $-T(r) \vec{u}_r$  et  $T(r + dr) \vec{u}_r$  exercées respectivement par les tronçons  $[r_T, r]$  et  $[r + dr, h]$  ;

- la force d'inertie d'entraînement  $\lambda dr \omega_\sigma^2 r \vec{u}_r$  ;
- Le force d'inertie de Coriolis est nulle car le câble est immobile dans le référentiel terrestre.

La somme de ces forces est nulle à l'équilibre, soit

$$T(r + dr) - T(r) + \lambda dr \left( r \omega_\sigma^2 - g_s \frac{r_s^2}{r^2} \right) = 0$$

Soit à l'ordre 1, en simplifiant par  $dr$  :

$$\frac{dT}{dr} + \lambda \left( r \omega_\sigma^2 - g_s \frac{r_s^2}{r^2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dr} &= -\lambda \left( r \frac{G m_T}{r_s^3} - g_s \frac{r_s^2}{r^2} \right) \\ &= -\lambda g_s \left( \frac{r}{r_s} - \frac{r_s^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

ce qui peut se réécrire

$$\frac{dT}{dr} = \chi \left[ \frac{r_s^2}{r^2} - \frac{r}{r_s} \right]$$

en posant

$$\chi = \lambda g_s$$

b) En admettant que  $T(4r_s) = 0$ , on obtient, en intégrant entre  $h = ar_s$  et  $r$  :

$$T(r) = \chi \left[ \frac{r_s^2}{4r_s} - \frac{r_s^2}{r} - \frac{r^2 - 16r_s^2}{2r_s} \right]$$

$$T(r) = \chi \left[ \frac{33r_s}{4} - \frac{r_s^2}{r} - \frac{r^2}{2r_s} \right]$$

Q34. Numériquement, on obtient :  $r_s = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$ ,  
 $g_s = 0,224 \text{ m.s}^{-2}$   
 et la tension du fil au point d'ancrage vaut  $T_E = T(r_T) = 1,46 \cdot 10^7 \text{ N}$ .

La valeur maximale de  $T(r)$  est  $T_{max} = T(r_s) = 6,38 \cdot 10^7 \text{ N}$ .

## B. Montée de la cage d'ascenseur le long du fil

Q35. On a deux phase pour le mouvement :

- Phase 1 : entre 0 et  $z_0$ , le mouvement est rectiligne uniformément accéléré :  
 $v(t) = a_0 t$  et  $z(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$ . On a  $v(t_0) = v_0 = a_0 t_0$  et  $z_0 = z(t_0) = \frac{1}{2} a_0 t_0^2$ .
- Phase 2 : entre  $z_0$  et  $h$ , le mouvement est rectiligne uniforme.  $v(t) = v_0$  et  
 $z(t) = z_0 + v_0(t - t_0)$ . De plus, on a  $h = z(t_m) = z_0 + v_0(t_m - t_0)$ .

Il vient :

$$\begin{cases} v_0 = a_0 t_0 \\ 4r_S - r_T = \frac{1}{2} a_0 t_0^2 + v_0(t_m - t_0) \end{cases}$$

soit

$$4r_S - r_T = \frac{1}{2} a_0 t_0^2 + a_0 t_0(t_m - t_0) = -\frac{1}{2} a_0 t_0^2 + a_0 t_0 t_m = 0$$

$t_0$  est solution de l'équation du second degré

$$t_0^2 - 2t_m t_0 + \frac{2}{a_0}(4r_S - r_T) = 0$$

dont les deux racines sont

$$t_0 = t_m \pm \sqrt{t_m^2 - \frac{2}{a_0}(4r_S - r_T)}$$

Seule la racine inférieure à  $t_m$  convient. En prenant  $t_m = 4$  jours solaires moyens ( $4 \times 86400$  s), on obtient

$$t_0 = 470 \text{ s et } v_0 = 470 \text{ m.s}^{-1}$$

L'altitude atteinte à la fin de la première phase est

$$z_0 = 1,10 \cdot 10^5 \text{ m}$$

On a bien  $z_0 \ll h$ .

Q36. Pendant la première phase, l'intensité du champ de pesanteur est

$$|g(r)| = g \frac{r_T^2}{(r_T + z)^2} = \frac{g}{\left(1 + \frac{z}{r_T}\right)^2}$$

Or  $z_0 \ll r_T$  donc  $|g(r)|$  reste pratiquement constante et égale à  $g$ .

La condition de roulement sans glissement s'écrit

$$\dot{z} \widehat{u}_z = \vec{\Omega} \wedge R_c \widehat{u}_x = R_c \dot{\theta} \widehat{u}_z$$

soit

$$\theta = \frac{z}{R_c}$$

Q37. Bilan des actions qui s'exercent sur le cylindre de droite :

- le poids du cylindre  $\vec{P} = m_c \vec{g}$  en  $C_d$  centre du cylindre droit,
- la force de tension du ressort  $\vec{T} = -k R_c \vec{u}_x$  en  $C_d$ ,
- la force de contact avec le câble  $\vec{R} = R_N \vec{u}_x + R_T \vec{u}_z$  en  $I$  point de contact du câble et du cylindre,
- la force d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_{ie} = -m a_0 \vec{u}_z$  en  $C_d$ ,
- la liaison pivot,
- le couple moteur  $\vec{\Gamma}_d = -\Gamma_0 \vec{u}_y$ .

Q38. Dans le référentiel en translation uniformément accéléré le cylindre est en rotation à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ . D'après le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe  $C_d \vec{u}_y$  :

$$J \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \mathcal{M}_y(\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{F}_{ie}) + \Gamma_{\text{pivot}} - \Gamma_0$$

Soit

$$\frac{1}{2} m_c R_c^2 \frac{d\dot{\theta}}{dt} = (-R_c \vec{u}_x \wedge R_T \vec{u}_z) \cdot \vec{u}_y - \Gamma_0$$

D'autre part, d'après le théorème de la résultante cinétique :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{F}_{ie}$$

Selon  $\vec{u}_z$  :  $0 = -m_c g + R_T - m_c a$ , soit  $R_T = m_c(a + g)$ .

il vient

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{2} m_c R_c \ddot{z} + R_c m_c (a + g) = \frac{1}{2} m_c R_c (3a + 2g)$$

Autre méthode : le théorème des puissances cinétiques peut s'écrire

$$\Gamma_0 \dot{\theta} = \frac{d}{dt} (E_c + E_p)$$

avec

$$E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}m_c\dot{z}^2$$

et

$$E_p = m_cgz + m_caz$$

soit

$$\frac{\Gamma_0}{R_c}\dot{z} = m_c(g+a)\dot{z} + \frac{1}{2}m_c\dot{z}\ddot{z}$$

et finalement

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}m_cR_c(2g + 3a)$$

AN :  $\Gamma_0 = 2,26.10^4 \text{ N.m}$

Q39. Pour qu'il y ait roulement sans glissement, on doit avoir  $\|\vec{R}_t\| < \|\vec{R}_N\|$ , avec  $R_T = m_c(a+g)$  et  $R_N = kR_c$ .

La condition de non-glissement peut ainsi s'écrire

$$|m_c(a-g)| < f_s k R_c$$

La valeur minimale de la constante de raideur  $k$  du ressort assurant le roulement sans glissement du cylindre de droite sur le fil pendant la première phase (accélérée) du mouvement est

$$k_{min} = \frac{m_c(g+a)}{f_s R_c}$$

AN :  $k_{min} = 4,3.10^5 \text{ N.m}^{-1}$

Q40. La force exercée par le câble est

$$2|R_T| = 2m_c(g+a) = 4,3.10^4 \text{ N}$$

Cette force reste très inférieure à la tension du câble ; la montée du système n'affecte donc pas sensiblement la tension du fil dans la première phase.