

Meilleure note :

Moyenne :

Écart-type :

Première partie

Température dans le tunnel de Fréjus

Extrait de Mines-Ponts PC 2016

I Évolutions saisonnières de la température dans le sol

1. La température moyenne est θ_0 . La température maximale est $\theta_0 + T_0$ et la température minimale est $\theta_0 - T_0$. Si on estime l'écart de température entre l'été et l'hiver à 20°C (ou 30°C), l'amplitude des oscillations peut être estimée à 10°C (ou 15°C).
2. Le vecteur \vec{j}_Q est le vecteur dont le flux à travers une surface représente la puissance thermique traversant la surface :

$$d\Phi_Q = \vec{j}_Q \cdot \vec{S} dt$$

Il a la dimension d'une puissance surfacique et se mesure donc en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$. Son équation aux dimensions est

$$[j_Q] = M.T^{-3}$$

3. Dans un milieu homogène et isotrope, macroscopiquement au repos, de température T non uniforme mais dont les variations ne sont pas trop brutales, le vecteur densité de flux thermique est

$$\vec{j}_Q = -\kappa \text{grad} T$$

On en déduit que κ se mesure en $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Son équation aux dimensions est

$$[\kappa] = M.L.T^{-3}.\Theta^{-1}$$

4. Le système étudié est une tranche de surface S et d'épaisseur dz . On note δQ l'énergie thermique reçue par la tranche considérée entre t et $t + dt$.

$$\delta Q = S dt [j_Q(x) - j_Q(x + dx)] = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} S dz dt$$

5. On étudie une tranche mésoscopique pour pouvoir modéliser le système par un milieu continu tout en pouvant considérer que la température y est uniforme.
6. S'il n'y a pas d'autre échange énergétique que l'échange δQ , on a, d'après le premier principe de la thermodynamique entre t et $t + dt$:

$$dU = \delta Q = -S dt dz \frac{\partial j_Q}{\partial z}$$

La température étant pratiquement uniforme, la variation d'énergie interne peut aussi s'écrire, en notant C la capacité thermique du système :

$$dU = C(T(z, t + dt) - T(z, t)) = c_s \rho_s S dz \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

7. On en déduit que

$$-S dt dz \frac{\partial j_Q}{\partial z} = c_s \rho_s S dz \times \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

soit

$$-\frac{\partial j_Q}{\partial z} = c_s \rho_s \frac{\partial T}{\partial t}$$

Compte tenu de la loi de Fourier, on en déduit

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = c_s \rho_s \frac{\partial T}{\partial t}$$

soit l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \text{ avec } D = \frac{\kappa}{\rho_s c_s}$$

Son équation aux dimensions est

$$[D] = L^2.T^{-1}$$

8. On recherche une solution harmonique d'une équation de diffusion ; c'est un problème classique (onde électromagnétique dans un métal, onde de cisaillement dans un fluide visqueux newtonien...) dont la solution est une onde progressive amortie. L'équation de diffusion se réécrit

$$i\omega \underline{T} = -D \underline{k}^2 \underline{T}$$

On obtient ainsi la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = -i \frac{\omega}{D}$$

soit

$$\underline{k} = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\omega}{D}} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2D}} (1 - i) = k' + ik''$$

La représentation complexe correspondante est, en posant $\epsilon = \pm 1$ et $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$:

$$\underline{T} = \theta_0 + T_0 e^{-\epsilon z/\delta} e^{i(\omega t - \epsilon z/\delta)}$$

La solution réelle est

$$T(z, t) = \theta_0 + T_0 e^{-\epsilon z/\delta} \cos\left(\omega t - \epsilon \frac{z}{\delta}\right)$$

Pour qu'elle reste bornée, on doit se limiter à $\epsilon = +1$; on a donc

$$T(z, t) = \theta_0 + T_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

La partie réelle de k , soit $k' = \frac{1}{\delta}$ décrit l'évolution de la phase initiale des oscillations de température en fonction de la profondeur, tandis que la partie imaginaire, soit $k'' = -\frac{1}{\delta}$ décrit l'atténuation des oscillations de température en fonction de la profondeur.

9. z_e est définie par

$$T_0 e^{-z_e/\delta} = \frac{T_0}{100}$$

On obtient

$$z_e = \delta \ln(100)$$

Numériquement, on obtient $\delta \simeq 5,32$ m. La valeur de z_e est de l'ordre de 5 m. z_e est très petit devant l'altitude du Fréjus, la température dans le tunnel est constante.

10. Pour les variations quotidiennes de température, la distance caractéristique d'atténuation est

$$\delta' = \frac{\delta}{\sqrt{365,25}} \approx 3 \text{ dm}$$

Les variations quotidiennes de température sont très rapidement atténuées. En terme de filtrage fréquentiel, le sol se comporte comme un **filtre passe-bas**.

II Température d'origine géophysique

11. Dans le bilan thermique d'une tranche, il faut rajouter le terme de création $\mathcal{P}_0 e^{-z/H} S dz$; le bilan entre t et $t + dt$ devient

$$dU = c_s \rho_s S dz \frac{\partial T}{\partial t} dt = -S dt dz \frac{\partial j_Q}{\partial z} + \mathcal{P}_0 e^{-z/H} S dz$$

soit

$$c_s \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mathcal{P}_0 e^{-z/H}$$

soit, en régime stationnaire :

$$\kappa \frac{d^2 T}{dz^2} + \mathcal{P}_0 e^{-z/H} = 0$$

12. En intégrant une première fois, on obtient

$$\kappa \frac{dT}{dz} = H \mathcal{P}_0 e^{-z/H} + A$$

Une seconde intégration donne alors

$$\kappa T(z) = -H^2 \mathcal{P}_0 e^{-z/H} + Az + B$$

Les constantes d'intégration sont déterminées par les conditions aux limites

$$-j_m = -\kappa \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=L_c} \quad \text{et} \quad T(0) = \theta_0$$

La première permet d'exprimer A :

$$j_m = H\mathcal{P}_0 e^{-L_c/H} + A \text{ ce qui détermine } A = j_m - H\mathcal{P}_0 e^{-L_c/H}$$

puis la seconde donne

$$\kappa\theta_0 = -H^2\mathcal{P}_0 + B \text{ ce qui détermine } B = \kappa\theta_0 + H^2\mathcal{P}_0$$

On a donc finalement

$$T(z) = \theta_0 + \frac{H^2}{\kappa}\mathcal{P}_0(1 - e^{-z/H}) + \frac{z}{\kappa}(j_m - H\mathcal{P}_0 e^{-L_c/H})$$

13. Au niveau de la surface

$$\begin{aligned} j_s &= -\kappa \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} \\ &= -H\mathcal{P}_0 - A \end{aligned}$$

$$j_s = H\mathcal{P}_0(e^{-L_c/H} - 1) - j_m$$

14. Numériquement

$$\begin{cases} j_m = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ W.m}^{-2} \\ H\mathcal{P}_0 e^{-L_c/H} = 2,78 \cdot 10^{-4} \text{ W.m}^{-2} \end{cases}$$

On peut donc négliger le second terme et retenir simplement

$$T(z) = \theta_0 + \frac{H^2}{\kappa}\mathcal{P}_0(1 - e^{-z/H}) + \frac{j_m z}{\kappa}$$

On obtient une température

$$T(1,70 \text{ km}) = 32,8^\circ\text{C}$$

La valeur de la puissance surfacique en $z = 0$ est

$$j_s = -5,97 \cdot 10^{-2} \text{ W.m}^{-2}$$

Le sol émet de l'énergie thermique.

III Prise en compte du relief

15. En régime stationnaire et sans terme de production, l'équation de la chaleur se réduit à

$$\Delta T = 0 = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

On cherche des solutions stationnaires une solution de la forme

$$T(x, z) = F(x)G(z) + cste$$

La condition aux limites en $z = 0$ s'écrit

$$F(x)G(0) + cste = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

On peut ainsi prendre

$$cste = T_s \text{ et } F(x)G(0) = T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors

$$F''(x)G(z) + F(x)G''(z) = 0$$

Soit

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(z)}{G(z)}$$

Le premier terme ne dépend que de x et le second terme ne dépend que de z . Ces deux termes sont égaux à une même constante B . Il vient

$$F''(x) - BF(x) = 0 \quad \text{et} \quad G''(z) + BG(z) = 0$$

Compte tenu de la condition aux limite en $z = 0$ on en déduit que $B = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}$.

On a

$$F(x) = A' \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) + B' \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

et

$$-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}G(z) + G''(z) = 0$$

La solution générale en G est donc de la forme

$$G(z) = A \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right) + B \exp\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right)$$

En imposant à G de rester finie quand $z \rightarrow +\infty$, on obtient $B = 0$. La condition aux limites en $z = 0$ conduit à $F(x) = T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ avec $G(0) = 1$, ce qui conduit à $A = 1$. Finalement, la température est

$$T(x, z) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right)$$

La dépendance en x est due au fait que l'épaisseur de roche au dessus du plan $z = 0$ dépend de x ; la distance caractéristique des variations d'épaisseur est λ qui est bien de l'ordre de 10 km.

16. En régime stationnaire et avec terme de production, l'équation de la chaleur se réduit à

$$\Delta T = -\frac{\mathcal{P}_0}{\kappa} e^{-z/H}$$

— La solution trouvée à la question 14, soit

$$T_a(z) = cste + \frac{H^2}{\kappa} \mathcal{P}_0 (1 - e^{-z/H}) + \frac{j_m z}{\kappa}$$

est solution de cette équation.

— D'après la question 15, la température

$$T_b(x, z) = cste' + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right)$$

est solution de l'équation sans terme de source, soit

$$\Delta T_b = 0$$

On en déduit que

$$\Delta(T_a + T_b) = -\frac{\mathcal{P}_0}{\kappa} e^{-z/H}$$

$T_a + T_b$ est donc une solution de l'équation avec sources internes, correspondant au champ de température

$$T(x, z) = T_s + \frac{H^2}{\kappa} \mathcal{P}_0 (1 - e^{-z/H}) + \frac{j_m z}{\kappa} + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right)$$

17. Un développement limité en z à l'ordre 1 permet d'écrire

$$T(x, z = h) = T(x, 0) + h \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$$

soit

$$T(x, 0) = T(x, z = h) - h \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$$

La loi de Fourier donne, en confondant $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=h}$:

$$j_s = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$$

donc

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{j_s}{\kappa}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= T_s(x) + \frac{j_s h}{\kappa} \\ &= \theta_0 + \frac{j_s h}{\kappa} \\ &= \theta_0 + \frac{j_s}{\kappa} h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

En reprenant $T_a + T_b$ en $z = 0$, on obtient

$$T(x, 0) = cste + cste' + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

On peut donc identifier

$$cste + cste' = \theta_0 \quad \text{et} \quad T_1 = \frac{j_s}{\kappa} h_0$$

et retenir finalement

$$T(x, z) = \theta_0 + \beta z + \frac{j_m z}{\kappa} + \frac{H^2}{\kappa} \mathcal{P}_0 (1 - e^{-z/H}) + \frac{j_s}{\kappa} h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right)$$

On obtient bien un résultat de la forme attendue, avec

$$\begin{cases} c_1 = \beta + \frac{j_m}{\kappa} \\ c_2 = \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa} \\ c_3 = \frac{j_s}{\kappa} \\ \delta = \frac{\lambda}{2\pi} \end{cases}$$

Deuxième partie

Autour des ondes EM

I Un miroir pour les ondes EM

II De la difficulté de blinder efficacement

Q11. La densité volumique d'énergie électrique est

$$u_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Q12. On en déduit l'ordre de grandeur de la norme du champ électrique

$$E \simeq \sqrt{\frac{u_{el}}{\epsilon_0}} = 7.10^3 \text{ V.m}^{-1}$$

A. Étude électrocinétique

Q13. L'intensité dans R_2 est, en orientant dans le sens de la flèche

$$i_2 = \frac{U_C}{R_1} + C \frac{dU_C}{dt}$$

avec

$$U_C = e - R_2 i_2$$

soit

$$R_2 C \frac{dU_C}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) U_C = e$$

Q14. Pour $0 < t < T$, on a $e = e_{max}$, soit

$$R_2 C \frac{dU_C}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) U_C = e_{max}$$

En introduisant la constante de temps $\tau = \frac{R_2 C}{1 + \frac{R_2}{R_1}}$, la solution générale s'écrit

$$U_C = \frac{e_{max}}{1 + \frac{R_2}{R_1}} + A e^{-t/\tau}$$

La constante A est déterminée par la condition initiale

$$0 = \frac{e_{max}}{1 + \frac{R_2}{R_1}} + A$$

soit finalement

$$U_C = \frac{e_{max}}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Q15. $U_C = R_1 i$ donc

$$U_C = \frac{e_{max}}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

ce qui est bien de la forme indiquée dans l'énoncé, avec

$$\begin{cases} I_M = \frac{e_{max}}{R_1 + R_2} \\ \tau = \frac{R_2 C}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \end{cases}$$

B. Champ magnétique créé par le fil parcouru par i

Q16. La densité de courant étant uniforme, on a simplement

$$\vec{j} = \frac{i}{\pi d_1^2} \vec{u}$$

Q17. Tout plan passant par l'axe du fil est plan de symétrie pour les courants, et donc plan d'antisymétrie pour \vec{B} ; \vec{B} est donc orthoradial et dépend de la distance à l'axe r .

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$$

Q18. Appliquons le théorème d'Ampère à un cercle (\mathcal{C}) de rayon r ayant pour axe l'axe du fil.

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C$$

où l'intensité enlacée est

$$I_C = \begin{cases} i & \text{si } d_1 < r < d_2 \\ i \frac{r^2}{d_1^2} & \text{si } r < d_1 \end{cases}$$

tandis que la circulation est, dans tous les cas :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r)$$

On en déduit

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} & \text{si } d_1 < r < d_2 \\ \frac{\mu_0 i r}{2\pi d_1^2} & \text{si } r < d_1 \end{cases}$$

C. Champ électrostatique dans l'ouverture

Q19. Dans l'espace entre le fil et l'ouverture, le potentiel scalaire est régi par l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0 \text{ soit } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0$$

Une première intégration conduit à

$$r \frac{\partial V}{\partial r} = \alpha$$

où α est une constante. En intégrant une seconde fois, entre d_2 et r , on obtient

$$V(r) = \alpha \ln \frac{r}{d_2}$$

Q20. α est déterminé par

$$V_1 = \alpha \ln \frac{d_1}{d_2}$$

On a donc finalement

$$V(r) = V_1 \frac{\ln \frac{r}{d_2}}{\ln \frac{d_1}{d_2}}$$

Q21. Le champ électrique s'en déduit par

$$\vec{E}_0 = -V'(r) \vec{e}_r = -\frac{V_1}{r \ln \frac{d_1}{d_2}} \vec{e}_r$$

D. Champ électrique dans le fil parcouru par un courant

Q22. La loi d'Ohm locale donne

$$\vec{E}_{cond} = \frac{1}{\gamma_{Cu}} j \vec{e}_z$$

soit, avec $j = 1,3 \cdot 10^4 \text{ A.m}^{-2}$,

$$E_{cond} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ V.m}^{-1}$$

Q23. La plus faible valeur de E_0 est

$$E_0(d_2) = 1,5 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1}$$

C'est très grand devant le champ électrique à l'intérieur du fil.

E. Champ électrique dans l'espace inter-armatures en régime variable

Q24. L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

avec

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial E_z}{\partial r} \vec{e}_\theta \text{ et } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{di}{dt}$$

On a donc

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{di}{dt}$$

soit, en intégrant entre d_1 et r compte tenu de la continuité de E_z en d_1 :

$$E_z(r, t) = E_{cond} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r}{d_1} \frac{di}{dt}$$

En ordre de grandeur, le terme supplémentaire dans E_z est

$$\frac{\mu_0 I_M}{\tau}$$

il devient du même ordre de grandeur pour

$$\frac{\mu_0 I_M}{\tau} \simeq E_0$$

c'est-à-dire pour

$$\tau \simeq \frac{\mu_0 I_M}{E_0} \simeq 4.10^{-13} \text{ s}$$

On ne connaît pas la valeur de τ , mais on peut raisonnablement supposer que c'est très grand devant cette valeur, et en déduire que le terme supplémentaire dans le champ électrique reste négligeable devant E_0 .

F. Transfert d'énergie électromagnétique

Q25. a) Le vecteur de Poynting a pour expression

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Le flux de $\vec{\Pi}$ à travers une surface représente la puissance rayonnée à travers cette surface.

Q25. b) A l'intérieur du fil, le vecteur de Poynting est de la forme

$$\vec{\Pi} = \frac{E \vec{e}_z \wedge B \vec{e}_\theta}{\mu_0}$$

Il est donc radial ; son flux à travers une section droite du fil est donc nulle.

Q25. c) Dans l'espace inter-armatures, le vecteur de Poynting est

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{V_1}{r \ln \frac{d_1}{d_2}} \vec{e}_r \right) \wedge \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta \right) = -\frac{V_1 i}{2\pi r^2 \ln \frac{d_1}{d_2}} \vec{e}_z$$

Son flux à travers une section droite de l'espace inter-armatures est

$$\iint \vec{\Pi} \cdot \vec{e}_z dS = -\frac{V_1 i}{2\pi \ln \frac{d_1}{d_2}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{d_1}^{d_2} \frac{dr}{r} = -\frac{V_1 i}{\ln \frac{d_1}{d_2}} \ln \frac{d_2}{d_1} = V_1 i$$

Q26. a) La puissance électromagnétique entrante est égale au flux du vecteur de Poynting, soit $\mathcal{P}_{\text{entrée}} = V_1 i$. Elle est égale à la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance à l'intérieur du boîtier.

Q26. b) Toute ouverture, aussi petite soit-elle, dans le blindage, permet à de l'énergie électromagnétique de pénétrer à l'intérieur de l'enceinte que l'on souhaite protéger.