Mécanique quantique : introduction

1. Étude d'un cellule photoélectrique au potassium

La cathode d'une cellule photoélectrique au potassium est éclairée par deux radiations lumineuses monochromatiques différentes de longueurs d'ondes respectives $\lambda = 490$ nm et $\lambda = 660$ nm. La puissance $P = 9,00.10^{-7}$ W de ces deux sources de rayonnement est la même. Le travail d'extraction d'un électron du potassium est $W_0 = 2,25$ eV.

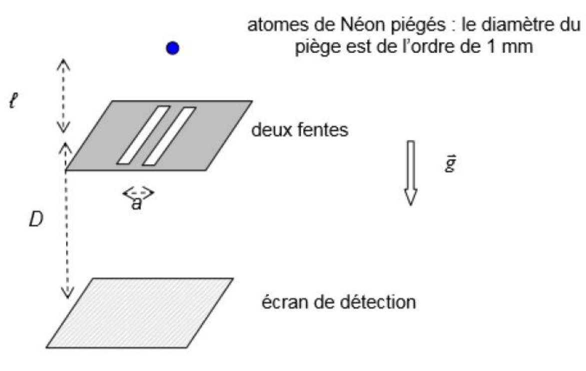
1. Les deux radiations permettent-elles l'émission d'électrons ?
2. Déterminer l'expression de la vitesse des électrons émis par la cathode et calculer sa valeur numérique.
3. On observe que l'intensité du courant de saturation est $I_s = 4,00.10^{-8}$ A. Déterminer le rendement quantique de la cellule, c'est-à-dire le rapport du nombre d'électrons émis au nombre de photons reçu. On supposera que tous les électrons émis participent au courant de saturation.

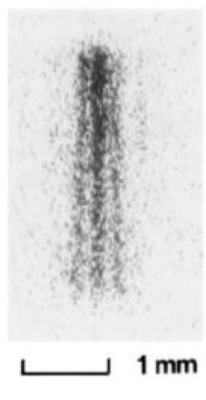
2. Longueur d'onde de de Broglie

1. Calculer la longueur d'onde de de Broglie d'un homme de 75 kg marchant à la vitesse de $5,0$ km.h^{-1}. Comparer à la largeur d'une porte et conclure.
2. Quelle énergie, en électronvolts, doit-on communiquer à des électrons, de masse $m_e = 9,11.10^{-31}$ kg, pour que leur longueur d'onde de de Broglie soit égale à $0,1$ nm ?
3. Calculer les longueurs d'onde de de Broglie pour un électron et un proton, de masse $m_p = 1,67.10^{-27}$ kg, dont les énergies cinétiques valent toutes 100 eV.

3. Interférences d'atomes (Shimizu et Takuma 1992)

Soit le dispositif simplifié ci-dessous, dans lequel des atomes de néon dans le même état quantique sont piégés et refroidis et tombent dans le champ de pesanteur terrestre.





1. Comment se manifestent les caractères ondulatoire et corpusculaire des atomes de néon dans cette expérience ?
2. Mesurer la valeur de l'interfrange i, distance entre deux franges brillantes ou sombres.

   Sachant que, dans une expérience de type trous d'Young, i est donnée par la formule :

   $$i = \frac{\lambda D}{a}$$

   Donner la valeur de la longueur d'onde λ associée à ces atomes.

   Données : $a = 6,0$ μm et $D = 113$ mm.

3. En déduire leur vitesse v. *Données* : masse molaire du néon $M = 20$ g.mol^{-1} et nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_\text{A} = 6,02.10^{23}$ mol^{-1}.
4. Cette vitesse, dite d'agitation thermique, est reliée à la température par la relation :

$$v = \sqrt{\frac{3k_\text{B}T}{m}}$$

où $k_\text{B} = 1,38.10^{-23}$ J.K^{-1} est la constante de Boltzmann, T la température en kelvin et m la masse d'un atome.

Déterminer la température T des atomes. Commentaire ?

5. Pourquoi doit-on travailler à si basse température ?

4. Énergie minimale d'un oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique unidimensionnel a une masse m et une pulsation propre ω_0. Il est soumis à une énergie potentielle $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$. La position moyenne $< x >$ et la quantité de mouvement moyenne $< p_x >$ de l'oscillateur sont nulles.

1. Utiliser la relation d'incertitude de Heisenberg spatiale pour montrer que la valeur moyenne de l'énergie de cet oscillateur est bornée inférieurement :

$$< E > \geqslant \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(\Delta x)^2,$$

où Δx représente l'indétermination quantique sur la position x de l'oscillateur.

2. Déterminer la valeur minimale que peut prendre la valeur moyenne de l'énergie de l'oscillateur en fonction de $\hbar$ et ω_0. Exprimer l'amplitude de l'indétermination quantique Δx en fonction de m, $\hbar$ et ω_0.
3. À température non nulle, en raison de l'agitation thermique, il existe aussi des fluctuations Δx_T de la position de l'oscillateur autour de sa valeur moyenne. On donne $\Delta x_T = \sqrt{\frac{k_BT}{m\omega_0^2}}$, où $k_B = 1,39.10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1} est la constante de Boltzmann.
   (a) Donner l'expression de la température T_c en dessous de laquelle les fluctuations quantiques sont plus importantes que les fluctuations thermiques.
   (b) Donner la valeur numérique de T_c dans le cas d'un oscillateur mécanique constitué d'une masse suspendue à un ressort. Choisir une fréquence d'oscillation correspondant à une expérience réalisable en TP. Commenter la valeur obtenue.

   En 2010, une équipe de l'Université de Californie à Santa Barbara a atteint le régime quantique en amenant un microrésonateur piézo-électrique de fréquence très élevée (6,0 GHz) à une température de 25 mK. Commenter le choix d'un oscillateur de fréquence élevée et d'une température aussi faible.

5. Oscillateur harmonique quantique

On considère une particule quantique, de masse m, soumise à une énergie potentielle de la forme $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$.

1. Sous quelle forme s'écrit la fonction d'onde d'un état stationnaire d'énergie E pour cet oscillateur ?
2. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans le cas considéré.
3. Pour l'état fondamental, on a $\varphi(x) = \mathcal{N}\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$.
   (a) Déterminer la constante de normalisation $\mathcal{N}$. On donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\alpha u^2)du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

   (b) Représenter l'allure de la densité de probabilité de présence de la particule. En déduire, sans calcul, la valeur de la position moyenne $< x >$ de la particule.
   (c) Déterminer l'expression de l'énergie E et de a en fonction de $\hbar$, m et de ω.

6. Atome d'hydrogène

On considère un atome d'hydrogène sphérique, de taille caractéristique a. Cet espace est supposé imposer un confinement à l'électron de cet atome. On admet l'approximation suivante pour l'énergie de l'électron dans l'atome :

$$E = E_c - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

1. (a) En employant l'inégalité d'Heisenberg, donner une estimation de l'énergie cinétique minimale de l'électron en fonction de a. Le second terme est l'énergie potentielle d'interaction électrique entre l'électron et le noyau, formé ici d'un proton.
   (b) Déterminer la valeur a_0 du paramètre a qui minimise l'expression de l'énergie E. Calculer sa valeur numérique, qui donne l'ordre de grandeur de la taille de l'atome d'hydrogène.
   (c) Quelle est la valeur minimale de l'expression approchée de E ? Dans l'état fondamental, on mesure expérimentalement $E_0 = -13,6$ eV. Comparer.
2. (a) En mécanique classique, pour un électron en orbite circulaire de rayon a autour du noyau, montrer que l'énergie mécanique est de la forme
   $$E = \frac{K}{a}$$
   où l'on explicitera la constante K.
   (b) L'électromagnétisme permet de montrer que l'électron en mouvement produit lors un champ électromagnétique dont le rayonnement se traduit par une très rapide perte d'énergie du système. Interpréter la phrase suivante : ≪C'est l'inégalité d'Heisenberg qui est à la base de la stabilité des atomes≫.

On donne : $h = 6,64 \cdot 10^{-34}$ J.s, $\epsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}$ m.F^{-1}, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.