Équation de Schrödinger pour une particule libre

1. Conservation locale de la densité de probabilité

En électromagnétisme, on a vu que l'équation locale de conservation de la charge totale contenue dans un volume donné d'un conducteur s'écrit $\dfrac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0$ où $\rho(M,t)$ est la densité volumique de charge au point M à l'instant t et $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de courant. Ce qui donne, pour un problème à une dimension suivant l'axe (Ox), avec $\vec{j} = j\vec{e}_x$: $\dfrac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial j}{\partial x} = 0$.

En mécanique quantique, la probabilité totale de trouver la particule dans un volume donné doit aussi être conservée.

1. En combinant l'équation de Schrödinger à une dimension et son expression complexe conjuguée, établir l'équation locale de conservation de la probabilité, reliant la densité de probabilité ρ à la densité de courant de probabilité $\vec{J}$ dont on donnera l'expression.
2. En utilisant la relation de dispersion de l'onde plane $\hbar\omega = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$, exprimer le vecteur densité de courant de probabilité $\vec{J}(x,t)$ en fonction de $\vec{k}$ (retrouver le résultat du cours) puis en fonction de la vitesse de groupe $\vec{v}_g$ associée au paquet d'onde décrivant la particule.
3. Proposer une analogie entre mécanique quantique et électromagnétisme dans ce contexte.

2. Combinaison linéaire d'états stationnaires

Soit une fonction d'onde $\psi(M,t)$ résultant de la combinaison linéaire de deux états stationnaires de fonctions d'ondes spatiales respectives $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$, et d'énergies respectives E_1 et $E_2 > E_1$.

1. Montrer que la densité de probabilité de présence dépend du temps et préciser son temps caractéristique d'évolution τ.
2. Décrire qualitativement l'évolution temporelle.
3. Montrer que $\tau(E_2 - E_1) \geq \dfrac{\hbar}{2}$ et interpréter.

3. Paquet d'ondes à spectre rectangulaire

On s'intéresse à une particule libre qui se déplace suivant l'axe Ox. On va supposer que plusieurs quantités de mouvement existent autour de p_0, à $\Delta p \ll p_0$ près, et on construit le paquet d'ondes suivant :

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(p) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(px - E(p)t\right)\right] dp$$

On suppose pour calculer la précédente formule que

$$A(p) = \left| \begin{array}{l} A_0 \;\text{ si }\; p \in \left[p_0 - \dfrac{\Delta p}{2}, p_0 + \dfrac{\Delta p}{2}\right] \\ 0 \;\text{ sinon} \end{array} \right.$$

1. Tracer l'allure du spectre $A(p)$.
2. Le calcul de la fonction d'onde montre que :

$$\psi(x,t) = C \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(p_0 x - \frac{p_0^2 t}{2m}\right)\right) \mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta p}{2\hbar}\left(x - \frac{p_0}{m}t\right)\right)$$

où C est une constante.

(a) Où se trouve le maximum de la densité de probabilité à la date t ? Interpréter sa dépendance en t.

(b) Évaluer la largeur Δx de la densité de probabilité. Est-ce cohérent avec l'inégalité de Heisenberg spatiale ?

(c) Tracer l'allure de $|\psi(x,t)|^2$ en fonction de x à deux dates différentes.

(d) Montrer qu'on peut normaliser cette fonction d'onde. On donnera C, sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2 x dx = \pi$.