

Devoir surveillé n°6

Samedi 22 mars 2025

2 heures

Première partie

Télécommunications

Cette partie est consacré à l'étude d'un mode de communication à distance. Pour toutes les applications numériques, repérées par les initiales A.N., on se contentera d'un ou deux chiffre(s) significatif(s). À l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont repérés par une notation avec barre : $\underline{z} \in \mathbb{C}$. Une grandeur sinusoïdale de pulsation ω sera associée à la représentation $e^{i\omega t}$.

Données numériques et constantes physiques

- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- Constante d'Avogadro : $N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Perméabilité du vide : $\mu_0 = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
- Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
- Rayon de la Terre : $R_T = 6400 \text{ km}$

Le physicien italien Marconi est considéré comme un des inventeurs de la transmission à grande distance de signaux électromagnétiques (la T.S.F., télégraphie sans fil, ou radio). Il a reçu à ce titre le prix Nobel de physique en 1909. On lui doit la réalisation de la première transmission radio transatlantique (1901) entre le nord-est du Canada et le sud-ouest de l'Angleterre, séparés par une distance à vol d'oiseau de 3 500 km.

I Échos ionosphériques

Lors de la première série d'expériences, le récepteur se situait au niveau du sol et l'émetteur était porté par des cerf-volants dont l'altitude, limitée par la longueur du fil, ne dépassait pas $h = 180 \text{ m}$. On néglige tout phénomène de réflexion sur le sol, la portée d'un tel émetteur est donc limitée par la courbure de la Terre.

1. Représenter sur un schéma les points d'émission E et de réception R du signal radio correspondant à cette transmission. Montrer qu'elle n'est possible que si la distance $d = ER$ vérifie $d < d_{max}$ et exprimer d_{max} en fonction de h et du rayon terrestre R_T .
A.N. : calculer d_{max} et conclure.

La propagation sur une grande distance d'ondes radio est en fait possible grâce aux échos ionosphériques, qu'on assimilera à des réflexions de l'onde électromagnétique sur la surface de séparation entre la basse atmosphère (assimilée au vide) et la haute atmosphère (l'ionosphère qui forme un plasma). Une onde électromagnétique incidente plane, progressive, de pulsation ω , polarisée rectilignement selon (Oy) , est émise en direction de ce plasma, dans une direction faisant l'angle θ avec la verticale (Oz) . L'ensemble est représenté sur la figure 5.

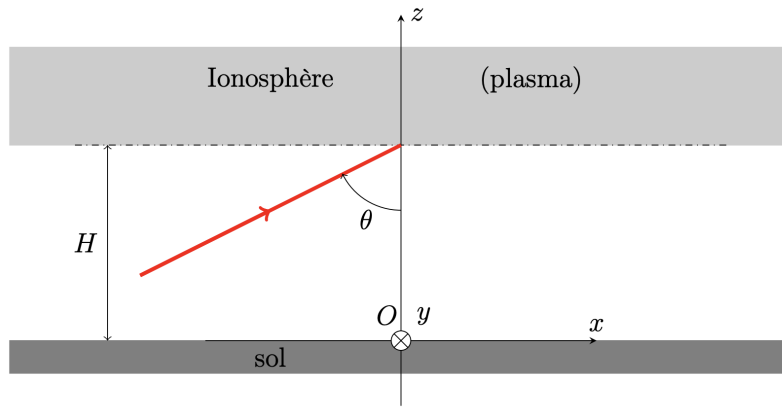


FIGURE 5 – Échos ionosphériques

2. Exprimer la représentation complexe du champ électrique $\underline{\vec{E}}$ de l'onde incidente d'amplitude E_0 ; on prendra l'origine des phases au point origine O .

Le champ électrique dans le plasma étant recherché sous la forme $\underline{\vec{E}}' = E'_0 \underline{\vec{e}}_y \exp[i(\omega' t - \underline{\vec{k}}' \cdot \underline{\vec{r}})]$, on peut établir l'équation de dispersion (ED) $\omega'^2 = \omega_p^2 + c^2 k'^2$ où $\omega_p^2 > 0$ est une constante qui ne dépend que des propriétés électromagnétiques locales de l'ionosphère. Par ailleurs, on admettra la continuité de toutes les composantes du champ électromagnétique à l'interface $z = H$ entre le vide et ce plasma. Une onde électromagnétique réfléchie existe également mais sa prise en compte n'est pas utile dans les calculs qui suivent.

3. Expliciter ω' et les composantes $k'_x = \underline{\vec{k}}' \cdot \underline{\vec{e}}_x$ et $k'_y = \underline{\vec{k}}' \cdot \underline{\vec{e}}_y$ en fonction de ω , c et θ .
4. En déduire $k_z'^2$ en fonction de ω , ω_p , c et $\cos \theta$ et en déduire que l'onde transmise ne peut pas se propager dans le plasma si $\omega < \omega_\ell$ et exprimer la pulsation limite ω_ℓ en fonction de ω_p et θ .
5. A.N. : pour l'ionosphère on prendra $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \simeq 1 \text{ MHz}$ et $H \simeq 175 \text{ km}$. Calculer $\cos \theta$ puis la fréquence limite f_ℓ dans le cas d'une transmission sur une distance totale $d \simeq 3500 \text{ km}$ (en négligeant l'influence de la courbure terrestre). Conclure.

II L'ionosphère

On considérera que l'ionosphère forme un plasma peu dense qui contient une densité particulière uniforme n d'électrons par unité de volume, et autant d'ions (de forte masse donc presque immobiles) de sorte que la charge totale reste partout nulle. On étudie ici encore la propagation d'une onde plane progressive et monochromatique, de champ électrique complexe $\underline{\vec{E}}$ dans le plasma.

6. Dans le cadre non relativiste, en justifiant les simplifications, expliciter l'équation du mouvement des électrons et en déduire la densité volumique de courant dans ce milieu sous la forme $\underline{\vec{J}} = \underline{\gamma}(\omega) \underline{\vec{E}}$; préciser l'expression, le nom et la dimension de la grandeur complexe $\underline{\gamma}(\omega)$.
7. Montrer que cette expression de $\underline{\vec{J}}$ permet d'obtenir une équation de dispersion (ED) ; préciser en particulier l'expression de la grandeur ω_p .
8. Que peut-on dire de la puissance moyenne dissipée dans ce milieu lors du passage de l'onde ? Que devient la puissance incidente électromagnétique dans le cas d'un écho ionosphérique ?

Les ondes électromagnétiques actuellement utilisées pour la transmission de signaux radio ou télévision vérifient $\omega \gg \omega_p$, au contraire des ondes des expériences historiques étudiées précédemment.

9. Citez l'ordre de grandeur des fréquences utilisées actuellement pour ce type de signaux. Quels sont les avantages et les inconvénients d'une transmission à haute fréquence ?

Deuxième partie

Propriétés optiques du métal or

On souhaite modéliser les propriétés optiques de l'or à l'état métallique à l'aide du modèle de Drude. Pour ce faire, on considère que le métal est composé d'un ensemble d'ions supposés fixes, qui constituent le réseau cristallin, et d'un gaz d'électrons libres de se déplacer sur des distances très largement supérieures aux distances interatomiques. Chaque électron porte la charge $-e$ et possède une masse notée m_e .

En l'absence d'excitation électromagnétique extérieure, l'état du métal est stationnaire et qualifié d'état de repos. Il est désigné par les grandeurs physiques suivantes, indicées par 0, indépendantes du temps. Les champs électrique et magnétique au repos, en un point M , sont identiquement nuls : $\vec{E}_0(M) = \vec{0}$ et $\vec{B}_0(M) = \vec{0}$. Les électrons sont animés d'un mouvement d'agitation thermique, mais la vitesse moyenne des électrons qui se situent au voisinage d'un point M est nulle : $\vec{v}_0(M) = \vec{0}$. Au repos, le métal est électriquement neutre à l'échelle locale : le nombre moyen d'électrons par unité de volume est égal au nombre moyen d'ions par unité de volume. On note n_{e0} le nombre moyen d'électrons par unité de volume dans l'état de repos du métal, supposé uniforme.

La propagation d'une onde électromagnétique vient perturber localement l'état de repos du métal. On suppose que cette perturbation est d'amplitude suffisamment faible pour que les différentes grandeurs physiques puissent s'écrire comme la somme de la valeur de cette grandeur au repos, indicée par 0 et d'une valeur perturbée, indicée par le chiffre 1. Ainsi, le champ électrique, le champ magnétique, le champ de vitesse des électrons et le nombre moyen d'électrons libres par unité de volume s'écrivent respectivement comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M, t) &= \vec{E}_0(M, t) + \vec{E}_1(M, t) = \vec{0} + \vec{E}_1(M, t) \\ \vec{B}(M, t) &= \vec{B}_0(M, t) + \vec{B}_1(M, t) = \vec{0} + \vec{B}_1(M, t) \\ \vec{v}(M, t) &= \vec{v}_0(M, t) + \vec{v}_1(M, t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M, t) \\ n_e(M, t) &= n_{e0}(M, t) + n_{e1}(M, t)\end{aligned}$$

Les grandeurs $\vec{E}_1(M, t)$, $\vec{B}_1(M, t)$, $\vec{v}_1(M, t)$ et $n_{e1}(M, t)$ sont associées à la propagation de l'onde électromagnétique dans le milieu. Leurs amplitudes respectives sont supposées suffisamment faibles pour qu'on se limite à un traitement linéaire : tous les calculs se limiteront à des termes qui s'expriment au premier ordre vis-à-vis des amplitudes indicées par le chiffre 1. Ci-dessous est présenté un exemple de linéarisation au premier ordre du produit de deux grandeurs $a(M, t)b(M, t)$ où le terme du second ordre est finalement négligé :

$$\begin{aligned}a(M, t)b(M, t) &= (a_0 + a_1(M, t))(b_0 + b_1(M, t)) \\ &= \underbrace{a_0 b_0}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{a_0 b_1(M, t) + b_0 a_1(M, t)}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{a_1(M, t)b_1(M, t)}_{\text{ordre 2}} \\ &\simeq a_0 b_0 + a_0 b_1(M, t) + b_0 a_1(M, t)\end{aligned}$$

I Mouvement des électrons libres

On s'intéresse dans un premier temps au mouvement des électrons libres. Le gaz d'électrons libres est assimilé à un fluide. On note respectivement m_e et $-e$ la masse et la charge électrique d'un électron. On suppose qu'en plus de la force d'interaction avec le champ électromagnétique de l'onde, les électrons sont soumis à une force dissipative qui modélise leurs interactions avec le réseau cristallin : $-\frac{m_e}{\tau} \vec{v}_1(M, t)$. Le mouvement des électrons est supposé non relativiste ($\|\vec{v}_1\| \ll c$), où c est la célérité de la lumière dans le vide). Dans l'approximation

linéaire, l'équation du mouvement des électrons se met sous la forme approchée :

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}(M, t) = -e \vec{E}(M, t) - \frac{m_e}{\tau} \vec{v}_1(M, t)$$

1. Expliquer pourquoi, compte tenu des hypothèses retenues, la composante magnétique de la force exercée par l'onde électromagnétique sur les électrons n'apparaît pas dans l'équation du mouvement précédente.
2. Exprimer, dans l'approximation linéaire, la densité volumique de courant électrique $\vec{j}_1(M, t)$ dans le métal en fonction, entre autres, de la vitesse moyenne des électrons $\vec{v}_1(M, t)$, puis établir l'équation différentielle liant $\vec{j}_1(M, t)$ et $\vec{E}_1(M, t)$.

II Relation de dispersion

On suppose que le métal est soumis à une onde électromagnétique, harmonique de pulsation ω , dont le champ électrique s'écrit ainsi en notation complexe :

$$\vec{E}_1(M, t) = \widehat{E}_1 \exp\left(i\left(\omega t - \underline{n} \frac{\omega}{c} x\right)\right) \vec{e}_y$$

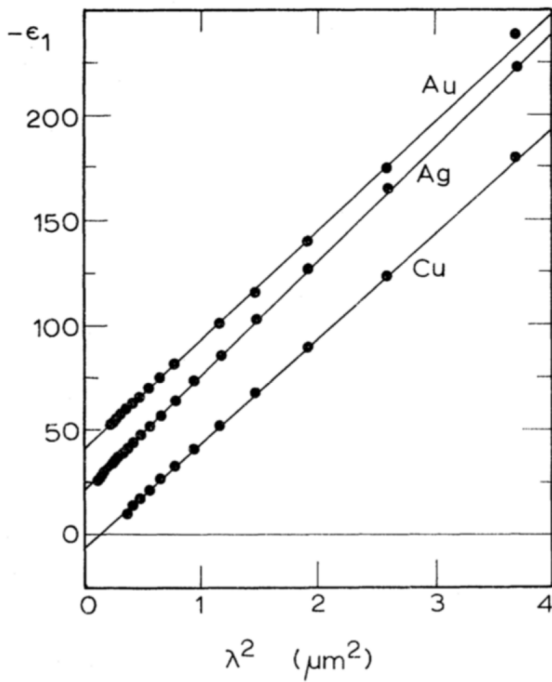
où $\underline{n} \in \mathbb{C}$ est appelé indice complexe du métal. L'espace est rapporté à la base orthonormée cartésienne $(O; \vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z)$.

3. Justifier que l'onde électromagnétique considérée peut être qualifiée de plane, progressive, transverse et que son état de polarisation est rectiligne.
4. Rappeler l'expression des équations de Maxwell dans le milieu considéré, en faisant intervenir $n_{e1}(M, t)$, $\vec{j}_1(M, t)$, $\vec{E}_1(M, t)$ et $\vec{B}_1(M, t)$.
5. Montrer que les caractéristiques de l'onde électromagnétique imposent $n_{e1}(M, t) = 0$.
6. Établir l'équation aux dérivées partielles qui régit l'évolution spatiale et temporelle du champ électrique $\vec{E}_1(M, t)$ dans le métal. On fera apparaître la pulsation plasma définie par la relation $\omega_p = \sqrt{\frac{n_{e0} e^2}{m_e \epsilon_0}}$.
7. Établir que le champ électrique est solution de l'équation aux dérivées partielles précédente à condition que :

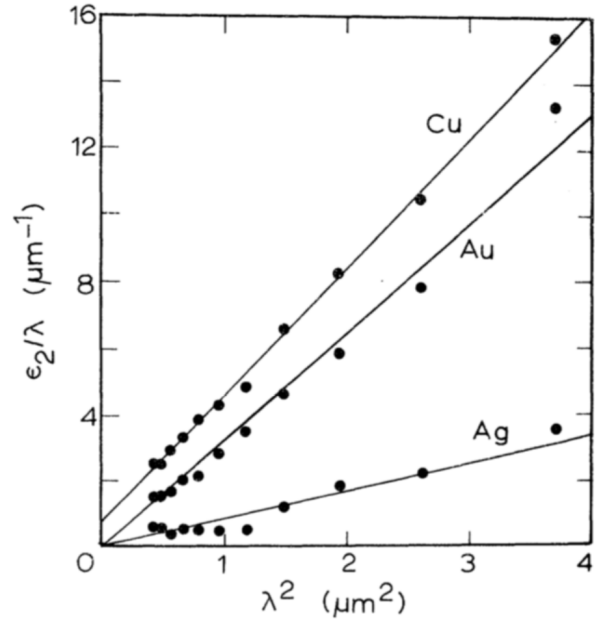
$$\underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}$$

8. Déterminer les expressions des constantes diélectriques ϵ_1 et ϵ_2 (qui sont des grandeurs réelles) telles que $\underline{n}^2 = \epsilon_1 - i\epsilon_2$. Exprimer ϵ_1 et ϵ_2 en fonction de ω , ω_p et τ .
9. En déduire les expressions asymptotiques des constantes diélectriques ϵ_1 et ϵ_2 dans la limite où $\omega\tau \gg 1$, et comparer ϵ_1 et ϵ_2 dans cette limite.

La figure 3 représente un ensemble de données expérimentales relatives aux constantes diélectriques de différents métaux. L'or correspond au symbole Au. Sur la figure de gauche est représentée l'allure de $-\epsilon_1$ en fonction de la longueur d'onde ($\lambda = 2\pi c/\omega$) au carré, et sur la figure de droite, ϵ_2/λ en fonction de la longueur d'onde au carré λ^2 , dans une certaine gamme de longueurs d'onde.



(a) Tracé de $-\epsilon_1$ en fonction de λ^2



(b) Tracé de ϵ_2/λ en fonction de λ^2 .

Figure 3 Évolution des constantes diélectriques de différents métaux en fonction de la longueur d'onde³ ; par souci de lisibilité, l'ordonnée à l'origine des droites représentant $-\epsilon_1$ en fonction de λ^2 pour l'or (Au) et l'argent (Ag) est arbitraire

10. Exploiter la figure 3 et les résultats théoriques précédents pour déterminer des valeurs numériques approchées du nombre moyen d'électrons libres n_{e0} dans le métal or et de la constante de temps τ . Comparer la valeur de n_{e0} obtenue à celle qu'on peut déduire des données relatives à l'or qui figurent en fin d'énoncé.

Données et formulaire

Constantes physiques

Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Données relatives à l'or

Symbole de l'élément chimique or	Au
Type de réseau cristallin	cubique à faces centrées
Rayon atomique	135 pm
Configuration électronique à l'état fondamental	$[Xe] 6s^1 4f^{14} 5d^{10}$