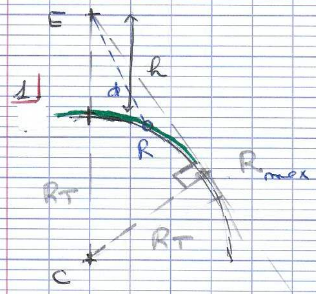
Première partie

Télécomunications

I- Echos ionosphériques

1)



Dans le triangle CER_{max}

$$R_T^2 + ER_{max}^2 = (R_T + h)^2$$

Soit $ER_{max} = \sqrt{h^2 + 2hR_T}$

On a $d < d_{max}$ avec $\boxed{ER_{max} \simeq \sqrt{2hR_T} = d_{max}}$

$$d_{max} = \sqrt{2 \times 180 \times 64\ 10^5}$$

$$= \sqrt{2 \times 2 \times 3^2 \times 10 \times 8^2 \times 10^5}$$

$d_{max} = 48\ km$ C'est bien inférieur à 3500 km.

L'expérience de Marconi n'a pas pu être réalisée par transmission directe.

2) On a une OPPS polarisée rectilignement

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = E_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{OM})}\ \vec{e_y}} \quad \varphi(0) = 0.$$

avec $\boxed{\vec{k} = \frac{\omega}{c}\left(\sin\theta\ \vec{e_x} + \cos\theta\ \vec{e_z}\right)}$

3) Il y a continuité du champ électrique en $z = H$

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}'(M,t)$$

Soit $E_0\, e^{i(\omega t - k\sin\theta\, x - k\cos\theta\, H)}\ \vec{e_y}$

$$= E_0'\, e^{i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{r})}\ \vec{e_y}$$

et ce $\forall t$ et $\forall x$ $\quad \vec{k}' = k_x'\vec{e_x} + k_y'\vec{e_y} + k_z'\vec{e_z}$

On a

$$E_0\, e^{i\omega t}\, e^{-ik\sin\theta\, x}\, e^{-ik\cos\theta\, H} = E_0'\, e^{i(\omega' t)}\, e^{-ik_x' x}\, e^{-ik_y' y}\, e^{-ik_z' H}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \omega' &= \omega \\ k_y' &= 0 \\ k_x' &= k\sin\theta = \frac{\omega}{c}\sin\theta \end{aligned}}$$

4) On a $k'^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2$

D'où $\dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = \dfrac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta + k_z'^2$

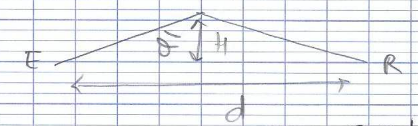
$$\boxed{k_z'^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\cos^2\theta - \frac{\omega_p^2}{c^2}} \in \mathbb{R}$$

L'onde se propage dans le plasma si $k_z'^2 \in \mathbb{R}^+$ donc si $\omega \geq \omega_\ell$

avec $\boxed{\omega_\ell = \dfrac{\omega_p}{\cos\theta}}$

Pour $\omega \leq \omega_\ell$ $k_z'^2 \in \mathbb{R}^-$ $\to$ k_z est imaginaire pur. Pas de propagation

5) AN. Transmission :



$$\cos\theta = \frac{H}{\sqrt{H^2 + \frac{d^2}{4}}}$$

avec $H = 175\ km$
$d = 3500\ km$

$$\omega_\ell = \frac{\omega_p}{\cos\theta} \qquad f_\ell = f_p\sqrt{1+\frac{d^2}{4H^2}}$$

$$f_\ell = 10^6 \times \sqrt{1+\left(\frac{3500}{350}\right)^2}$$

$$= 10^6 \sqrt{1+100}$$

$$f_\ell = 10 \text{ MHz}.$$

La transmission avec 1 seule réflexion peut se faire pour des fréquences inférieures à 10 MHz

33

II _ L'ionosphère

6) Système étudié : 1 $e^\ominus$

Référentiel du plasma.

Bilan des forces :

- le poids $\vec{P} = m_e \vec{g}$ négligeable
- la force de Lorentz

Plasma peu dense : pas d'interaction entre e-/ions

$$\vec{F}_L = -e\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)$$

Or $\frac{\|\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \leqslant \frac{vB}{E}$ et dans le vide $\frac{B}{E} = \frac{1}{c}$

D'où $\frac{\|\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \lessapprox \frac{v}{c} \ll 1$ pour des $e^\ominus$ non relativiste

D'après la 2nde loi de Newton

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = \cancel{\vec{P}} - e\vec{E} - \cancel{e\vec{v}\wedge\vec{B}}$$

En régime sinusoïdal forcé

$$i\omega m_e \underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$$

On note $\vec{J}$ la densité volumique de courant due au mouvement des électrons

$$\vec{J} = -en\vec{v}$$

$$\underline{\vec{J}} = \frac{ne^2}{i\omega m_e}\underline{\vec{E}} = \underline{\gamma}(\omega)\underline{\vec{E}}$$

avec $\boxed{\underline{\gamma}(\omega) = -\frac{ine^2}{\omega m_e}}$ analogue à la conductivité du plasma

$$[\gamma] = \frac{[j]}{[E]} = \frac{[\text{courant}]/\text{surface}}{[\text{potentiel élec}]/L}$$

$$= \frac{[\text{courant}]}{L[\text{tension}]} = \frac{1}{[\text{résistance}]L}$$

or $P = RI^2$ $[R] = \frac{ML^2T^{-2}}{T \cdot I^2}$

$$\boxed{[\gamma] = M^{-1}L^{-3}T^3I^2}$$

Unité : en $\Omega^{-1}m^{-1}$ ou $S\,m^{-1}$

7) Maxwell _ Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Maxwell _ Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

D'où $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

avec, en complexe $\underline{\vec{J}} = \underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}}) = -\mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$$

De plus $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E}$

D'où $\Delta\vec{E} = \mu_0\underline{\gamma}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

$-\underline{k}'^2 = i\omega\mu_0\underline{\gamma} - \omega^2/c^2$

$\underline{k}'^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu_0\left(\dfrac{-ine^2}{\omega m_e}\right)\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\underline{k}'^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

avec $\boxed{\omega_p^2 = \dfrac{ne^2}{m_e\varepsilon_0}}$

8) On a localement $p_J(t) = \vec{J}\cdot\vec{E}$

or $\underline{\vec{J}} = -i\dfrac{ne^2}{\omega m_e}\underline{\vec{E}}$

$= e^{-i\pi/2}\dfrac{ne^2}{\omega m_e}\underline{\vec{E}}$

donc $E(t)$ et $J(t)$ sont en quadrature de phase

$\langle E(t)\cdot J(t)\rangle = 0$

En moyenne il n'y a pas de puissance dissipée lors du passage de l'onde

Dans le cas de l'écho toute la puissance incidente est réfléchie

Deuxième partie

Propriétés optiques du métam or

I - Mouvement des électrons libres

Or a $\dfrac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} = -\dfrac{e}{m_e}\vec{E}(r,t) - \dfrac{1}{\tau}\vec{v}_1(r,t)$

1) Force de Lorentz : $\vec{F}_\mathcal{L} = -e(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$

or $\dfrac{\|\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} < \dfrac{v_1 B}{E}$ Dans le vide on a $B = E/c$

On suppose que le rapport est du même ordre de grandeur

soit $\dfrac{\|\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} < \dfrac{v_1}{c} \ll 1$ pour des électrons non relativistes

Mieux : $\dfrac{\|\vec{f}_{magn}\|}{\|\vec{f}_{élec}\|} < \dfrac{v_1 B_1}{E_1}$ ← ordre 2 / ← ordre 1

2) Soit $\vec{j}_1(r,t)$ la densité volumique de courant électrique

$\vec{j}_1(r,t) = -e(n_{e0} + n_{e1}(r,t))\,\vec{v}_1(r,t)$ ← ordre 2

$$\boxed{\vec{j}(r,t) \simeq -e\,n_{e0}\,\vec{v}_1(r,t)}$$

or $\vec{v}_1$ est régie par $m_e\dfrac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} + \dfrac{m_e}{\tau}\vec{v}_1 = -e\vec{E}_1$

D'où $$\boxed{\frac{m_e}{n_{e0}e}\left(\frac{\partial\vec{j}_1}{\partial t} + \frac{1}{\tau}\vec{j}_1\right) = +e\vec{E}_1}$$

II - Relation de dispersion

$$\vec{E}_1(x,t) = \hat{E}_1 \exp\left(i\left(\omega t - n\frac{\omega}{c}x\right)\right)\vec{e_y}$$

3) Spatialement $\vec{E}_1$ ne dépend que de x
→ onde plane
Motif $\omega\left(t - \frac{n x}{c}\right)$ onde progressive selon x ↑

$\vec{e_y} \perp$ à la direction de propagation
donc onde transverse
$\vec{E}_1$ dirigée selon $\vec{e_y}$ fixe : polarisation rectiligne

4) Equations de Maxwell :

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ avec $\rho = n_{e0}(-e+e) + n_{e1}(-e)$
et $\vec{E} = \vec{E}_1$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E}_1 = -e\frac{n_{e1}}{\varepsilon_0}}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B}_1 = 0$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}_1 = \mu_0\vec{j}_1 + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$$

5) L'onde étant transverse :

$$\mathrm{div}\,\vec{E}_1 = \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{=0} = 0 + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial E_z}{\partial z}^{=0}$$

6) On a $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}_1) = \vec{\mathrm{grad}}\big(\underbrace{\mathrm{div}(\vec{E}_1)}_{=0}\big) - \Delta\vec{E}_1$

et $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}_1) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}_1)$

$$+\Delta\vec{E}_1 = +\mu_0\frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}_1}{\partial t^2}$$

or $\frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} + \frac{1}{\tau}\vec{j}_1 = \frac{n_{e0}e^2}{m_e}\vec{E}_1$

D'où

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta\vec{E}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^3\vec{E}_1}{\partial t^3}\right) + \frac{1}{\tau\mu_0\varepsilon_0}\left(\Delta\vec{E}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}_1}{\partial t^2}\right)$$

$$= \frac{n_{e0}e^2}{m_e\varepsilon_0}\frac{\partial\vec{E}_1}{\partial t}$$

$$\boxed{c^2\frac{\partial}{\partial t}\Delta\vec{E}_1 - \frac{\partial^3\vec{E}_1}{\partial t^3} + \frac{c^2}{\tau}\Delta\vec{E}_1 - \frac{1}{\tau}\frac{\partial^2\vec{E}_1}{\partial t^2} = \frac{n_{e0}e^2}{m_e\varepsilon_0}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \omega_p^2\frac{\partial\vec{E}_1}{\partial t}}$$

7) Avec $\vec{E}_1 = \hat{E}_1 e^{i(\omega t - \underline{n}\frac{\omega}{c}x)}\vec{e_y}$

$$\cancel{c^2}\, i\omega\, i^2\,\underline{n}^2\frac{\omega^2}{\cancel{c^2}} - (i\omega)^3 + \frac{\cancel{c^2}}{\tau}(i\underline{n})^2\frac{\omega^2}{\cancel{c^2}}$$

$$-\frac{1}{\tau}(i\omega)^2 = \omega_p^2\, i\omega$$

$$\underline{n}^2\left(-i\omega^3 - \frac{\omega^2}{\tau}\right) + i\omega^3 + \frac{\omega^2}{\tau} = \omega_p^2 i\omega$$

$$\omega^2\underline{n}^2\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right) = \omega^2\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right) - \omega_p^2 i\omega$$

$$\underline{n}^2 = 1 - \frac{i\omega\omega_p^2}{\omega^2\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)}$$

$$\boxed{\underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau}}}$$ Ok

8) On veut $\underline{n}^2 = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2$

$$= 1 - \omega_p^2\,\frac{\omega^2 + i\omega/\tau}{\omega^4 + \omega^2/\tau^2}$$

D'où

$$\boxed{\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + 1/\tau^2}}$$

et

$$\boxed{\varepsilon_2 = +\frac{\omega_p^2}{\tau\omega^3 + \frac{\omega}{\tau}}}$$

9) Pour $\omega\tau \gg 1$

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2\tau^2}{\tau^2\omega^2 + 1} \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\varepsilon_2 = +\frac{\omega_p^2\tau^2}{\tau^3\omega^3 + \tau\omega} \simeq +\frac{\omega_p^2}{\tau\omega^3}$$

On a alors

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{1 - \omega_p^2/\omega^2}{\omega_p^2/\tau\omega^3} = \frac{\tau\omega^3 - \tau\omega\omega_p^2}{\omega_p^2} = \omega\tau\left[\frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1\right]$$

Si ω pas trop proche de ω_p $\varepsilon_1/\varepsilon_2 \gg 1$.

b) $-\varepsilon_1 = -1 + \omega_p^2 \dfrac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2}$

$\varepsilon_2 \cdot \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\omega}{2\pi c} \varepsilon_2 = + \dfrac{\omega_p^2}{2\pi c} \cdot \dfrac{1}{\tau \omega^2}$

$\varepsilon_2 \dfrac{1}{\lambda} = + \dfrac{\omega_p^2}{8\pi^3 c^3 \tau} \lambda^2$

On a bien des droites

1ère figure α_1 = pente de la droite

$\alpha_1 = \dfrac{\omega_p^2}{4\pi^2 c^2} = \dfrac{100}{2\,10^{-12}}$

2ᵉ figure $\alpha_2 = \dfrac{\omega_p^3}{8\pi^3 c^3} \dfrac{\omega_p}{\tau}$

$= \dfrac{10}{3\,10^{-18}}$.

D'où $\omega_p^2 = 5.10^{13} \times 4 \times \pi^2 \times 9\,10^{16}$

$= 5 \times 4 \times 9 \times 10^{30}$

$\omega_p \simeq 20\,10^{15}$ Hz.

et $\dfrac{\omega_p}{\tau} = \dfrac{10}{3\,10^{-18}} \times \left(\dfrac{2\,10^{-12}}{100}\right)^{3/2}$

or $\omega_p^2 = \dfrac{n_{e0} e^2}{m_e \varepsilon_0}$ $n_{e0} =$