

Mécanique des fluides

I Rapports

CCINP 2024

Les bilans macroscopiques de fluides en écoulement permanent sont, comme chaque année, délicats pour les candidats. La définition précise du système fermé dans l'étude des fluides en écoulement permanent laisse toujours à désirer. Dans les bilans de quantité de mouvement, les forces pressantes sont souvent oubliées ou mal évaluées.

CCINP 2023

Les bilans macroscopiques de quantité de mouvement ou d'énergie cinétique pour les fluides en écoulement stationnaire constituent une véritable difficulté pour nombre de candidats. Leur mise en place exige une définition précise du système fermé à partir d'un système ouvert défini par une surface de contrôle. Un effort est attendu sur ce point. Les forces pressantes sont souvent oubliées.

Dans les bilans d'énergie cinétique ou mécanique, la puissance des forces intérieures doit être évoquée.

De façon générale, en mécanique des fluides, il est important de bien analyser les hypothèses relatives à la nature des écoulements, avant d'entreprendre la simplification de l'équation de Navier-Stokes ou l'utilisation d'une relation de Bernoulli.

Mines-ponts 2024

La notion de débit volumique en mécanique des fluides est souvent floue. Le lien avec un calcul de flux est rarement clair.

Mines-ponts 2023

En statique des fluides, un nombre non négligeable de candidats semblent considérer que poussée d'Archimède et résultante des forces de pressions sont distinctes. Les calculs de forces pressantes illustrent le fait que beaucoup de candidats ne savent pas qu'une base cylindrique ou sphérique est locale : ceci a pour conséquence des résultats étonnants de forces pressantes ; l'utilisation des symétries du problème puis la sommation des projections permet de grandement simplifier les calculs dans la plupart des situations abordées.

Centrale-Supélec 2024

Comme l'an passé, la mise en place d'un bilan (de matière, de quantité de mouvement ou d'énergie) est parfois compliquée : il faut impérativement revoir ce point en commençant par la définition du système ET du référentiel, ce dernier étant souvent oublié.

L'utilité du nombre de Reynolds n'est pas toujours évidente notamment dans la simplification de l'équation de Navier-Stokes.

La force surfacique de cisaillement, rappelée dans l'énoncé, est parfois mal comprise et sa manipulation est alors très délicate. Il faut reprendre ce point.

Le calcul de $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$ pose des problèmes à certains candidats.

Centrale-Supélec 2022

Comme l'an passé, la mise en place de bilan est souvent compliquée voire impossible : il faut impérativement revoir ce point en commençant par la définition du système ET du référentiel, ce dernier passant souvent à la trappe. Les hypothèses de la relation de Bernoulli sont généralement connues formellement mais semblent compliquées à vérifier in situ. La mise en équation des écoulements classiques (Poiseuille, Couette) n'a pas toujours été fluide, de même que la mise en place d'une forme de champ des vitesses ou la projection des équations usuelles (connaissance et maîtrise des opérateurs à revoir).

II Questions de cours

- Équations d'Euler et de Bernoulli.
- Théorème de Bernoulli.
- Notion de viscosité.
- Démonstration du théorème de Bernoulli pour un écoulement incompressible, stationnaire, homogène, irrotationnel et parfait. Idem pour un écoulement rotationnel

III Exercices

1. Équilibre d'un fluide – CCINP

Un cylindre de rayon R est rempli d'eau sur une hauteur h . L'eau est en équilibre avec la pression atmosphère à la pression p_0 . On met en rotation le cylindre autour de son axe jusqu'à ce qu'il atteigne la vitesse angulaire ω . On constate que l'eau se met à tourner et finit par être en équilibre par rapport au cylindre. On rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

1. Déterminer la pression en tout point de l'eau.
2. Montrer que l'équation de la surface libre est une parabole du type :

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + B$$

3. Déterminer l'expression de B .

2. Fluide visqueux entre deux plaques – Centrale

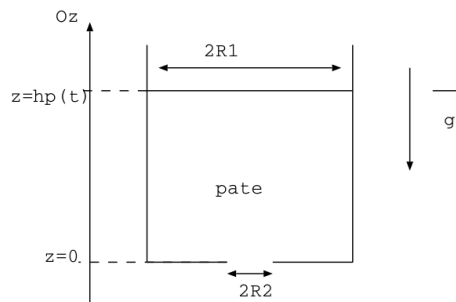
On a deux disques en rotation autour de l'axe Oz , de même rayon a . Le disque 1 (D_1) est à la cote $z = 0$ et le deuxième (D_2) à $z = e$ avec $a \gg e$, donc on peut négliger les effets de bords en $r = a$. Entre les deux disques il y a un fluide visqueux incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité η . D_1 tourne à la vitesse angulaire ω_1 et D_2 à la vitesse angulaire ω_2 . On donne le champ des vitesses : $\vec{v}(M, t) = v(r, z, t)\vec{e}_\theta$.

1. Justifier la forme du champ de vitesse : $\vec{v}(M, t) = r\omega(z, t)\vec{e}_\theta$.
2. Si on a $v(z)$, la force exercée par une couche de fluide sur celle au-dessus est $\vec{dF} = -\eta \cdot \frac{dv}{dz} dS \vec{e}_\theta$. On considère un petit volume élémentaire du fluide compris entre r et $r + dr$, θ et $\theta + d\theta$ et z et $z + dz$. Quelles sont les forces qui s'appliquent sur ce volume élémentaire ?

3. (a) Appliquer le théorème du moment cinétique au petit élément de fluide pour trouver l'équation de diffusion.
 (b) On se place en régime permanent. On a ω_1 et ω_2 qui sont constantes. Trouver l'expression de ω .
 (c) Quel est le couple que le fluide exerce sur le disque 1 ? Définir un coefficient de frottement entre les 2 disques.
 (d) Application numérique. Calculer f . Données pour l'huile de ricin : $\rho = 0,965 \text{ g.cm}^{-3}$, $\eta = 1015 \text{ mPa.s}$.
 (e) Vérifier que l'on est bien en régime laminaire.
4. L'ensemble du système est initialement au repos. À $t = 0$ on a $\omega_2 = \Omega$ et $\omega_1 = 0$. Déterminer l'ordre de grandeur de la mise en place du régime permanent.

3. Déversoir de pâte à gâteau

Le but du déversoir de pâte est de faire couler dans des petits moules un volume de pâte à gâteau constant de manière automatisée. On cherche donc à déterminer le temps de coulée afin de connaître la durée pendant laquelle l'actionneur motorisée doit laisser s'écouler la pâte.



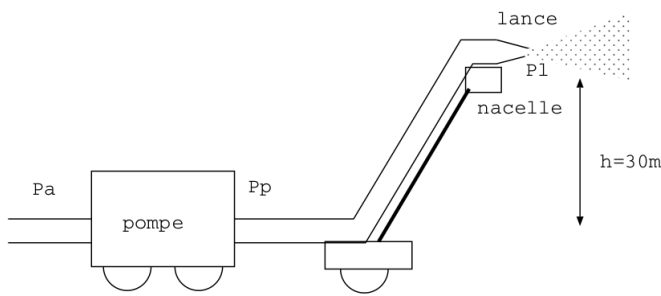
On modélise le réservoir par un cylindre de rayon R_1 rempli d'une hauteur initiale de pâte h_0 baignant dans l'air atmosphérique de pression P_0 . À l'instant $t = 0$, la pâte s'écoule à l'air libre à travers une section cylindrique de rayon R_2 . On désigne par $h_p(t)$ la hauteur de la pâte à l'instant t . La pâte est assimilée à un fluide incompressible de masse volumique μ . On néglige tout effet dissipatif et on se place en régime quasi-stationnaire.

1. Exprimer la vitesse v_1 de la pâte sur la surface libre en haut du déversoir, en fonction de $h_p(t)$, g , R_1 et R_2 .
2. Donner la relation simple entre v_1 et $\frac{dh_p}{dt}$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $h_p(t)$.
3. On remplit le déversoir avec la quantité de pâte nécessaire pour faire 10 petits gâteaux contenant chacun 80 g de pâte. Calculer le temps nécessaire pour remplir le moule du premier gâteau et le temps pour remplir les 10 moules.
 Données : $\mu = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $R_1 = 5,0 \text{ cm}$, $R_2 = 0,70 \text{ cm}$, $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.
4. Vérifier que $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est bien négligeable devant $\vec{g}$. Quelle hypothèse cela permet-il de valider ?

4. Lance incendie

Pour éteindre les feux, les pompiers utilisent des lances à incendie, reliées à de longs tuyaux acheminant l'eau depuis des fourgons ou des moto-pompes. Ces lances permettent de régler le débit et la forme du jet.

Lors de l'incendie de Notre-Dame de Paris, le débit Q des lances utilisées était de l'ordre de 500 L.min^{-1} et le diamètre d de 70 mm.



1. Estimer la valeur de la vitesse d'éjection v_e du jet à la sortie de la lance arrosant la charpente du chevet de la cathédrale situé en bas à droite sur la photographie présentée. On admettra que cette image ne présente pas de déformation de perspective et que le jet d'eau a une hauteur de 20 m.
Comparer la valeur de v_e à la vitesse v_t de l'eau dans le tuyau et expliquer la différence observée.
2. L'eau utilisée est pompée dans un camion-citerne ou fourgon-pompe stationné sur la route. On appelle $\Delta P = P_p - P_l$, la différence de pression dans le tuyau entre la sortie de la pompe (pression P_p) et l'entrée de la lance (pression P_l). En supposant le fluide parfait, quelle doit être, en régime permanent, la différence de pression pour que l'eau arrive au niveau d'une nacelle située à 30 m de hauteur ?
3. En s'aidant d'un bilan de puissance, déterminer la puissance électrique minimale à fournir à la pompe pour obtenir une pression à la lance $P_l = 6$ bars et un débit de $500 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$ dans les conditions décrites plus haut (hauteur de la nacelle 30 m par un fluide parfait). On supposera que la pression d'alimentation de la pompe est $P_a = 1$ bar.
4. En réalité, l'eau est visqueuse. Pour le débit des lances étudiées, l'écoulement dans les tuyaux est-il laminaire ou turbulent ?

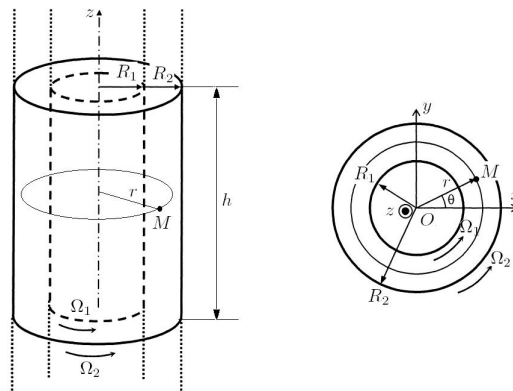
Donnée : viscosité de l'eau : $\eta = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

5. Viscosimètre de Couette

Un viscosimètre de Couette se compose de deux cylindres coaxiaux, de rayons R_1 (rayon extérieur du cylindre interne) et R_2 (rayon intérieur du cylindre externe). L'espace entre les cylindres est rempli d'un liquide dont on veut mesurer la viscosité dynamique η .

Le cylindre externe est immobile, et le cylindre interne est en rotation uniforme, de vitesse angulaire ω , autour d'un axe vertical. La hauteur h du liquide est suffisante pour pouvoir négliger les effets d'extrémités, et en particulier l'action du fond sur le liquide. On néglige l'effet de la pesanteur. Le régime est permanent.

On considère un point M repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.



On admet que les champ de vitesse et pression s'écrivent : $\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_\theta$ et $p = p(r)$.

1. Déterminer l'expression de l'accélération convective dans le cas de l'écoulement étudié.

De plus, on donne l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques pour l'écoulement étudié :

$$\Delta \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \vec{u}_\theta - \frac{v}{r^2} \vec{u}_\theta$$

En appliquant l'équation de Navier-Stokes, montrer que le champ des vitesses est de la forme $v(r) = \frac{C}{r} + Dr$.

2. Déterminer C et D .

3. On donne l'expression de la force surfacique de viscosité exercée sur un élément de surface $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$ par le fluide situé au-delà de r sur le fluide situé en deçà de r :

$$d\vec{F} = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) dS \vec{u}_\theta$$

Exprimer le moment de la force exercée par le fluide sur le cylindre intérieur.

4. En déduire le couple exercé par le moteur pour maintenir la rotation constante du cylindre intérieur.

5. Étudier le cas où $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$.

6. A.N. : $R_1 = 50$ mm, $e = 3$ mm, $h = 20$ cm et $\omega = 1$ tr/s. Calculer le couple pour mesurer une viscosité voisine de 1 Pa.s.

6. Écoulements géostrophiques – Centrale

On étudie l'écoulement d'un fluide de masse volumique μ à la surface de la Terre. On note $\mathcal{R}$ le référentiel géocentrique et $\mathcal{R}'$ le référentiel terrestre.

1. Ecrire l'équation d'Euler dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

2. On définit le nombre de Rossby, noté Ro , comme le rapport du terme convectif $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ sur le terme $-2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$. On note U la vitesse moyenne du fluide, L la distance caractéristique de l'écoulement et ν la viscosité cinématique.

— Avec $U = 10$ m.s⁻¹, $L = 1000$ km et $\nu = 10^{-5}$ m².s⁻¹, évaluer les nombres de Rossby Ro et de Reynolds Re .

— Peut-on négliger la viscosité du fluide ?

— Proposer une simplification de l'équation d'Euler.

3. a) Montrer qu'en régime stationnaire, on a $\nabla (P + \mu g z) = -2\mu \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$.

b) Que dire de la pression dynamique $\hat{P} = P + \mu g z$ sur une ligne de courant ?

c) Comparer avec le cas où le théorème de Bernoulli est applicable.

4. On utilise la base cylindrique pour repérer le champ des vitesses $\vec{v}(M) = u\vec{e}_r + v\vec{e}_\theta$. On étudie un tourbillon, centré en A , de latitude λ . Le tourbillon est d'axe Az .

a) Montrer que le gradient vertical de pression est uniforme et indépendant de la vitesse d'écoulement.

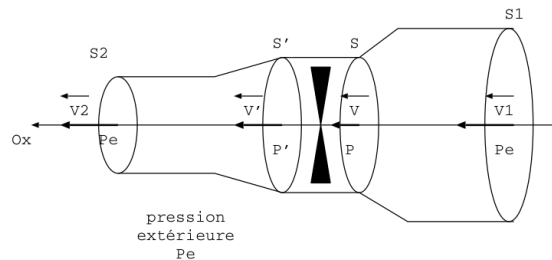
b) On se place dans l'hémisphère Nord. On étudie un anticyclone et une dépression. À l'aide des questions précédentes, orienter le gradient de pression radial, les lignes de courant, l'axe de rotation et indiquer par une flèche la force de Coriolis.

c) Comment ces résultats sont-ils modifiés dans l'hémisphère sud ?

7. Propulseur de plongée

Les plongeurs ont parfois recours à un propulseur de plongée nommé scooter, leur permettant de se propulser plus rapidement et d'explorer davantage les fonds marins. Celui-ci est simplement composé d'une hélice animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Ox et peut faire atteindre au plongeur une vitesse maximale de 10 km/h . L'étude est faite dans le référentiel galiléen R' lié à l'appareil. On considère un tube de courant possédant la symétrie de révolution autour de Ox et s'appuyant sur les pales de l'hélice. Ce tube de courant définit une surface fermée, constituée d'une surface latérale S_{lat} et des sections droites amont et aval S_1 et S_2 . La pression à l'extérieur est uniforme et égale à P_e .

RS2



Sur la surface S_1 , la vitesse du fluide est uniforme et égale à $V_1 \vec{e}_x$

Sur la surface S_2 , la vitesse du fluide est uniforme et égale à $V_2 \vec{e}_x$

Au voisinage de l'hélice, on considère deux sections S et S' d'aire sensiblement égale à S :

- sur la surface S , la vitesse est $V \vec{e}_x$ et la pression est P
- sur la surface S' , la vitesse est $V' \vec{e}_x$ et la pression est P'

Au voisinage proche de l'hélice entre S et S' l'écoulement est perturbé et il existe une discontinuité de la pression de part et d'autre de l'hélice. L'eau de mer sera supposé un fluide parfait et incompressible, en écoulement stationnaire. On néglige l'influence de la pesanteur.

1. Donner les relations entre les surfaces et les vitesses. Que conclure sur V et V' ?
2. Exprimer la différence de pression $P - P'$ en fonction de ρ , V_1 et V_2 en utilisant le théorème de Bernoulli.
3. Evaluer la force $\vec{F}$, résultante des forces exercées par l'hélice sur le fluide, en faisant un bilan de quantité de mouvement dans le système fermé et mobile compris entre S et S' à l'instant t .
4. Evaluer la force $\vec{F}$, résultante des forces exercées par l'hélice sur le fluide, en faisant un bilan de quantité de mouvement dans le système fermé et mobile compris entre S_1 et S_2 à l'instant t .
5. En déduire l'expression de V en fonction de V_1 et V_2 .

8. Écoulement de l'eau sous un ski

Un skieur de fond avance en ligne droite, sur un sol enneigé horizontal, à la vitesse $V_0 \vec{e}_x$ et à partir de l'instant $t = 0$ le skieur n'utilise plus ni ses jambes ni ses bâtons, sa vitesse s'écrit alors $V_s(t) \vec{e}_x$. L'aire de contact entre les skis et la neige est $S = 0,05 \text{ m}^2$, la largeur d'un ski étant $L = 5 \text{ cm}$. Sous les skis il y a une fine couche d'eau liquide d'épaisseur e dans laquelle champ de vitesse s'écrit $V(x, y, z, t) \vec{e}_x$ et le champ de pression $P = P(z)$. $z = 0$ correspond à l'interface liquide-neige.

Données: masse du skieur avec ses skis $m = 80 \text{ kg}$, viscosité de l'eau $\eta = 2.10^{-3} \text{ Pa.s}$, épaisseur du film d'eau $e = 6 \text{ }\mu\text{m}$, la force de viscosité de l'eau sur une surface S s'écrit $\eta S \frac{\partial V}{\partial z}$.

1. Montrer que le champ de vitesse de l'eau sous le ski peut se simplifier en $V(z, t) \vec{e}_x$.
2. On fait l'hypothèse que l'écoulement sous les skis est quasi stationnaire, déduire de l'équation de Navier Stokes que la vitesse de l'eau sous le ski s'écrit $\frac{V_s(t)z}{e} \vec{e}_x$.
3. Exprimer le débit volumique d'eau sous le ski et représenter le profil des vitesses.
4. Montrer, en appliquant la RFD au système skieur-skis, que la vitesse du skieur peut s'écrire $V_s(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ où τ est à exprimer en fonction des données du problème. AN: calculer τ .
5. On ne fait plus l'hypothèse d'un régime quasi stationnaire. Montrer que l'équation de Navier Stokes conduit à une équation de diffusion vérifiée par la vitesse V d'écoulement de l'eau sous le ski. En déduire un temps caractéristique de diffusion, à calculer et à comparer à τ . Conclure.