

# Analyse spectrale Échantillonnage

## I- Signaux temporels et représentation spectrale

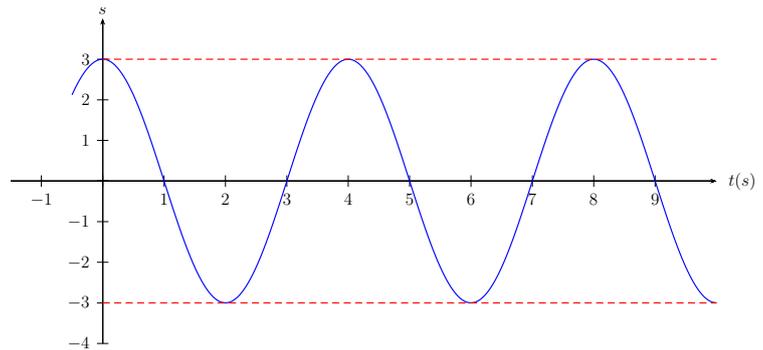
### 1 - Signal sinusoïdal

#### a) Expression

Un signal sinusoïdal (fonction du temps) est de la forme

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- $S_m \geq 0$  est l'amplitude ;
- $\omega$  est la pulsation ;
- $\varphi$  est la phase à l'origine des temps.



Ce signal est  $T$ -périodique, avec

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La fréquence est

$$f = \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

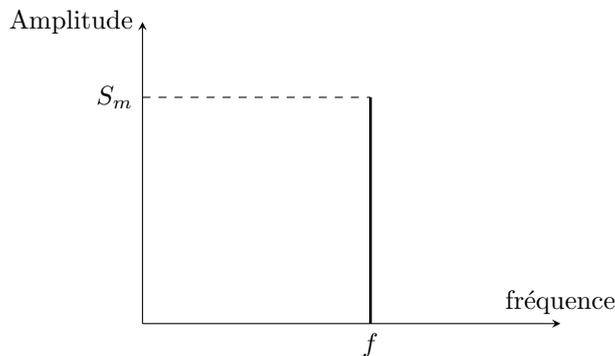
L'expression de  $s(t)$  peut se mettre sous la forme suivante

$$s(t) = S_m \cos \varphi \cos(\omega t) - S_m \sin \varphi \sin(\omega t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

avec  $A = \dots\dots\dots$  et  $B = \dots\dots\dots$

#### b) Spectre

On représente l'amplitude du signal sinusoïdal en fonction de la fréquence ou de la pulsation. Une seule pulsation contribue à un signal sinusoïdal. On dit que le spectre est discret.



✘ Expérience : pour un signal sinusoïdal d'amplitude crête à crête de 8,0 V, de fréquence 1,0 kHz, faire une acquisition et la transformée de Fourier avec l'oscilloscope, puis avec LatisPro ( $T_{tot} = 10$  ms,  $N = 1024$  pt).

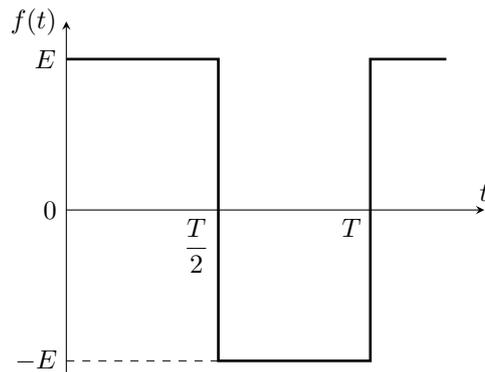
## 2 - Fonction périodique du temps

### a) Exemples

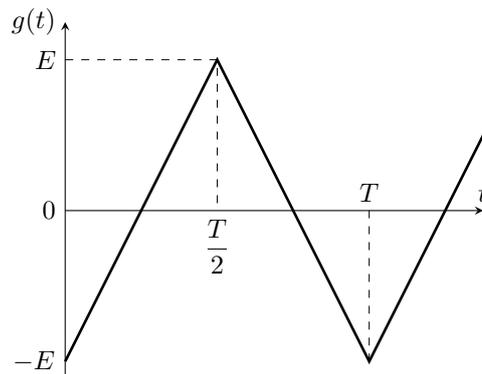
#### - Créneau symétrique

Le créneau carré symétrique d'amplitude  $E$ , est la fonction  $T$ -périodique définie sur la période  $[0; T]$  par

$$\begin{cases} f(t) = +E & \text{pour } t \in \left[0; \frac{T}{2}\right[ \\ f(t) = -E & \text{pour } t \in \left[\frac{T}{2}; T\right[ \end{cases}$$



#### - Signal en dents de scie



On peut remarquer que  $g'(t) = \alpha f(t)$ , où  $\alpha$  est une constante.

### b) Développement en série de Fourier

#### - Théorème de Fourier

Toute fonction périodique d'une variable réelle ne présentant qu'un nombre fini de discontinuités sur une période est égale à la somme d'une série trigonométrique appelée série de Fourier de cette fonction.

Soit  $t \rightarrow f(t)$  de période  $T_s$ .

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_s t) + b_n \sin(n\omega_s t)) \quad \text{avec} \quad \omega_s = 2\pi/T_s.$$

Les coefficients ont pour expression :

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T_s} \int_{t_0}^{t_0+T_s} f(t) \cos(n\omega_s t) dt \\ b_n = \frac{2}{T_s} \int_{t_0}^{t_0+T_s} f(t) \sin(n\omega_s t) dt \end{cases}$$

On remarque que  $\frac{a_0}{2}$  est la **valeur moyenne** de  $f$ .

Remarque : si  $f$  est paire alors tous les coefficients  $b_n$  sont nuls, et si  $f$  est impaire,  $a_n = 0$  pour  $n \geq 1$ .

La composante sinusoïdale de période  $T_s$  (de même période que le signal) est appelée **le fondamental** du signal :

$$f_1(t) = a_1 \cos(\omega_s t) + b_1 \sin(\omega_s t)$$

La composante sinusoïdale de période  $\frac{T_s}{n}$  est appelée **harmonique de rang  $n$**  du signal :

$$f_n(t) = a_n \cos(n\omega_s t) + b_n \sin(n\omega_s t)$$

**- Autre expression**

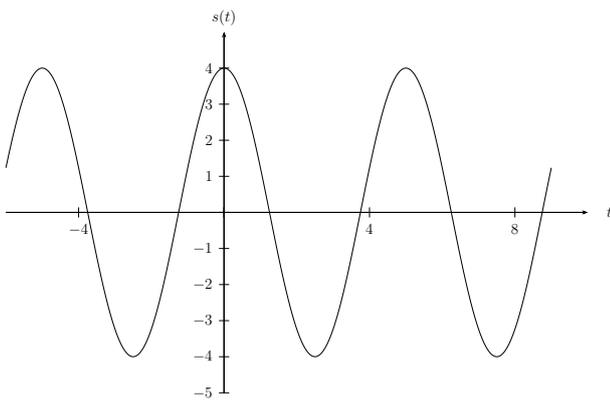
On peut réécrire la composante de pulsation  $n\omega_s$  :

$$a_n \cos n\omega_s t + b_n \sin n\omega_s t = a'_n \cos(n\omega_s t + \phi_n)$$

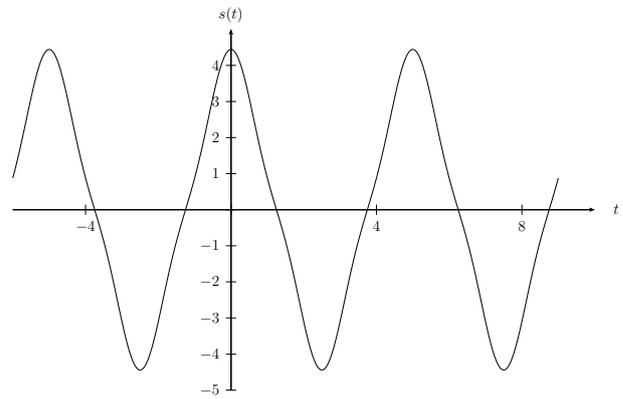
on obtient alors :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos(n\omega_s t + \phi_n).$$

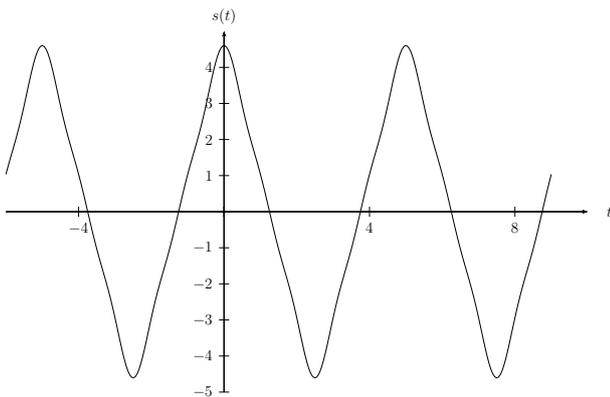
**- Exemple du signal en dents de scie symétrique pair**



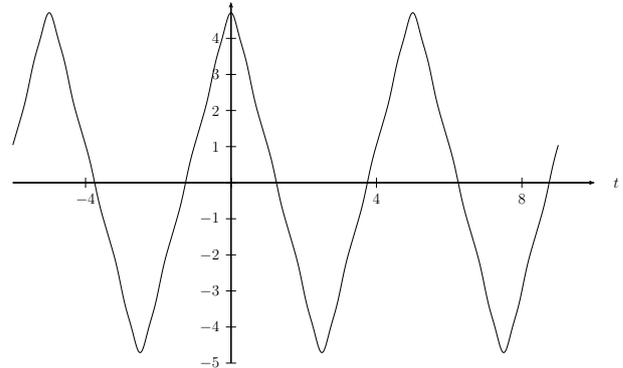
$$s_1(t) = S'_0 \cos(\omega_s t)$$



$$s_3(t) = S'_0 \left[ \sum_{n=0}^1 \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\omega_s t) \right]$$



$$s_5(t) = S'_0 \left[ \sum_{n=0}^2 \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\omega_s t) \right]$$



$$s_{13}(t) = S'_0 \left[ \sum_{n=0}^6 \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\omega_s t) \right]$$

**- Exemple du signal créneau symétrique impair**

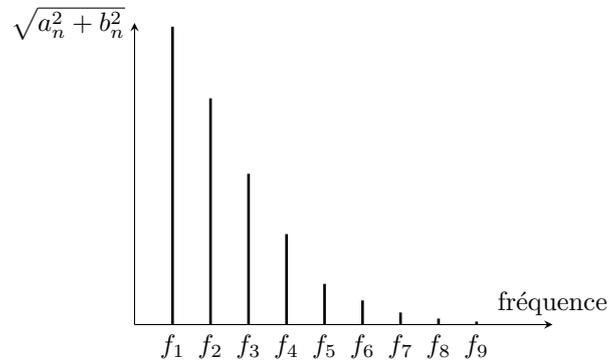
On montre que

$$s(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin((2p+1)\omega_s t)}{2p+1}.$$

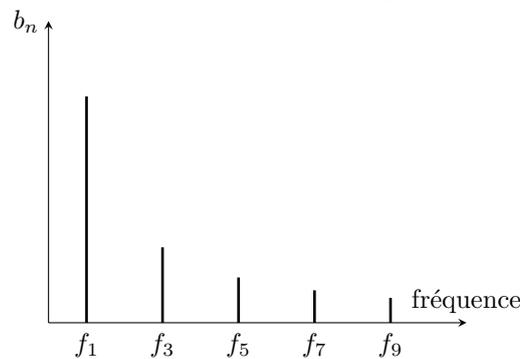
## c) Spectre

**Cas général** : Le spectre reste discret, mais contient une infinité de pulsations ; la pulsation fondamentale est  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_s}$  et les pulsations suivantes  $\omega_n = n\omega_1$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

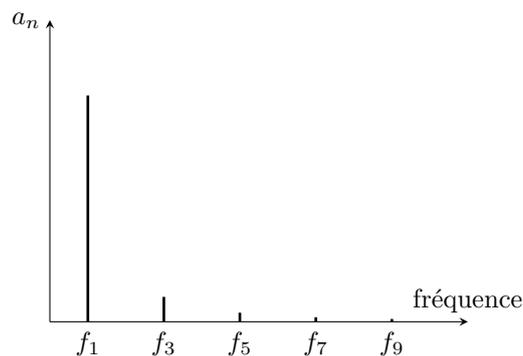
On convient de représenter le spectre en fréquence de la façon suivante :

Cas du créneau pair symétrique :

Seules les fréquences de rang impair apparaissent dans le spectre :  $\omega_{2p+1} = (2p+1)\omega_1$ , où  $p \in \mathbb{N}$ .

Cas du signal pair en dents de scie :

Comme dans l'exemple précédent, seules les fréquences de rang impair apparaissent dans le spectre :  $\omega_{2p+1} = (2p+1)\omega_1$ , où  $p \in \mathbb{N}$ .



✘ **Expérience** : pour un signal triangulaire puis créneau d'amplitude crête à crête de 8,0 V, de fréquence 1,0 kHz, faire une acquisition et la transformée de Fourier avec l'oscilloscope, puis avec LatisPro ( $T_{\text{tot}} = 10$  ms,  $N = 1024$  pt).

Mesurez les amplitudes des pics.

### d) Représentation complexe

On peut également utiliser un développement sur des exponentielles complexes :

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = \underline{c}_n e^{in\omega t} + \underline{c}_{-n} e^{-in\omega t}.$$

avec

$$\underline{c}_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{a'_n}{2} e^{i\phi_n}.$$

On obtient alors :

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n e^{in\omega t}$$

avec

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-in\omega t} dt.$$

## 3 - Fonction à support borné

### a) Définition

Une fonction à support borné est une fonction nulle hors d'un domaine borné.

### b) Exemples

**Fonction porte** : C'est la fonction définie par

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour } |t| > \frac{\tau}{2} \\ f(t) = E & \text{pour } |t| \leq \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

**Sinusoïde limitée temporellement** : C'est une fonction sinusoïdale sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$  et nulle hors de cet intervalle.

### c) Transformation de Fourier

**Transformée de Fourier** : On définit<sup>1</sup> la transformée de Fourier d'un signal temporel  $f(t)$  par

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

**Théorème d'inversion** : On montre que le signal temporel peut être reconstitué à partir de sa transformée de Fourier par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{+j\omega t} d\omega.$$

Ceci signifie donc que  $f(t)$  peut être considéré comme une superposition d'une infinité de fonctions sinusoïdales.

1. On trouve dans la littérature des définitions assez diverses, selon que la variable est la fréquence ou la fréquence angulaire (pulsation) pour la fonction  $\hat{f}$ .

**d) Spectre**

Le spectre est continu ; il est décrit par la fonction  $\omega \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\hat{f}(\omega)|$ .

**Exemple de la fonction porte** : la transformée de Fourier de la fonction porte est

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j\omega t} dt$$

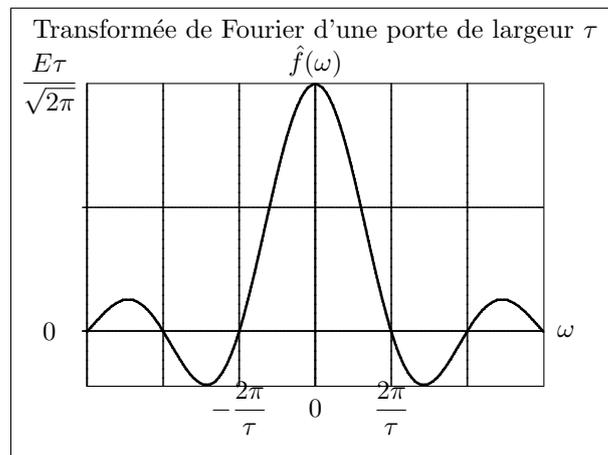
soit, en explicitant l'intégrale

$$\hat{f}(\omega) = \frac{E\tau}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau},$$

ce qui peut s'écrire, en introduisant la fonction *sinus cardinal* :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{E\tau}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(\omega\tau/2).$$



La largeur spectrale peut être évaluée à  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ , ce qui représente la demi-largeur du pic central ; on a alors

$$\Delta\omega \times \tau = 2\pi.$$

Ce résultat se généralise de façon semi-quantitative à des profils temporels quelconques sous la forme :

$$\Delta\omega \times \tau \simeq 2\pi.$$

En Mécanique Quantique, cette propriété, qui est une propriété générale de la Transformée de Fourier, est connue sous le nom de Relation d'Indétermination de Heisenberg :

$$\Delta x \times \Delta p_x \simeq \hbar.$$

**Exemple du train de sinusoïde** : la transformée de Fourier de cette fonction est

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{S_m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \frac{S_m}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} (e^{-j(\omega-\omega_0)t} + e^{-j(\omega+\omega_0)t}) dt$$

soit,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{S_m\tau}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\sin((\omega - \omega_0)\tau/2)}{(\omega - \omega_0)\tau/2} + \frac{\sin((\omega + \omega_0)\tau/2)}{(\omega + \omega_0)\tau/2} \right],$$

ce qui peut s'écrire,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{S_m\tau}{2\sqrt{2\pi}} (\text{sinc}((\omega - \omega_0)\tau/2) + \text{sinc}((\omega + \omega_0)\tau/2)).$$

## II- Valeur moyenne et valeur efficace

### 1 - Cas général

La valeur moyenne  $\langle f \rangle$  d'un signal temporel  $f(t)$  pendant l'intervalle  $[t_0, t_0 + \tau]$  est

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} f(t) dt$$

La valeur efficace  $f_{\text{eff}}$  d'un signal temporel  $f(t)$  pendant l'intervalle  $[t_0, t_0 + \tau]$  est la grandeur positive telle que

$$f_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} (f(t))^2 dt = \langle f^2 \rangle$$

### 2 - Fonction sinusoïdale

Pour  $f(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ , on obtient, en prenant la moyenne sur un nombre entier de périodes :

$$\langle f \rangle = 0 \text{ et } f_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$$

### 3 - Fonction périodique

#### a) Valeur moyenne et développement en série de Fourier

La moyenne de toutes les composantes sinusoïdales est nulle. Il reste donc, avec les notations précédentes :

$$\langle f \rangle = \frac{a_0}{2}$$

#### b) Formule de Parseval

**Théorème :**  $f(t)$  étant une fonction périodique de coefficients de Fourier  $a_n$  et  $b_n$ , on a l'identité suivante :

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} (f(t))^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

**Signification :** La valeur quadratique moyenne de  $f$  est la somme des valeurs quadratiques moyennes des composantes sinusoïdales.

**Interprétation énergétique :** la puissance en régime périodique est la somme des puissances des harmoniques successives.

#### c) Rapport cyclique d'un signal périodique

Soit un signal  $T$ -périodique  $t \rightarrow f(t)$  pour lequel on peut distinguer deux états sur une période. Cela peut être, par exemple

- état 1 :  $f(t) > a$  et état 2 :  $f(t) \leq a$
- état 1 :  $f'(t) > a$  et état 2 :  $f'(t) \leq a$

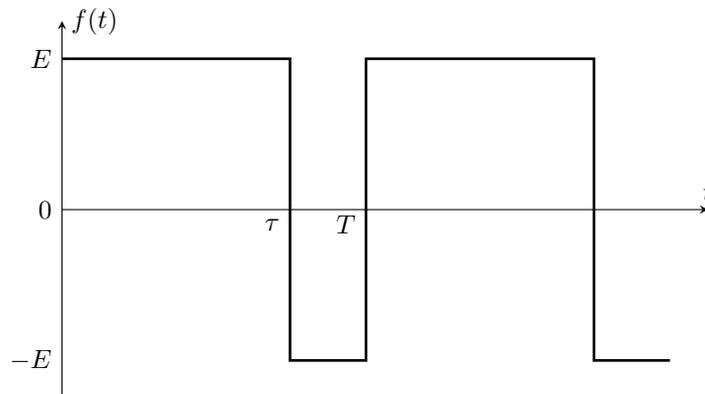
où  $a$  est une constante de dimension physique convenable. Soit  $\tau$  la durée de séjour dans l'état 1 sur une période ; la durée de séjour dans l'état 2 est  $T - \tau$ . On définit le rapport cyclique par

$$\alpha = \frac{\tau}{T}$$

Il peut varier entre 0 et 1.

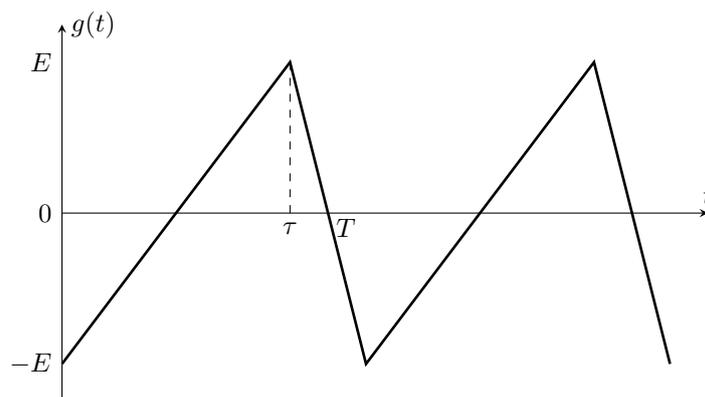
Dans le cas du signal périodique ci-dessous, il est naturel de définir

- un état haut pour  $f(t) = E$
- un état bas pour  $f(t) = -E$



Dans le cas du signal périodique ci-dessous, il est naturel de définir

- une rampe montante pour  $g'(t) > 0$
- une rampe descendante pour  $g'(t) < 0$



On peut définir sur ces exemples le rapport cyclique par

$$\alpha = \frac{\tau}{T}$$

#### 4 - Fonction à support borné

##### a) Formule de Parseval

**Théorème :**  $f(t)$  étant une fonction à support borné de transformée de Fourier  $\hat{f}$ , on a l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}(\omega))^2 d\omega$$

**Signification :** La valeur quadratique moyenne de  $f$  est la somme des valeurs quadratiques moyennes des composantes sinusoïdales.

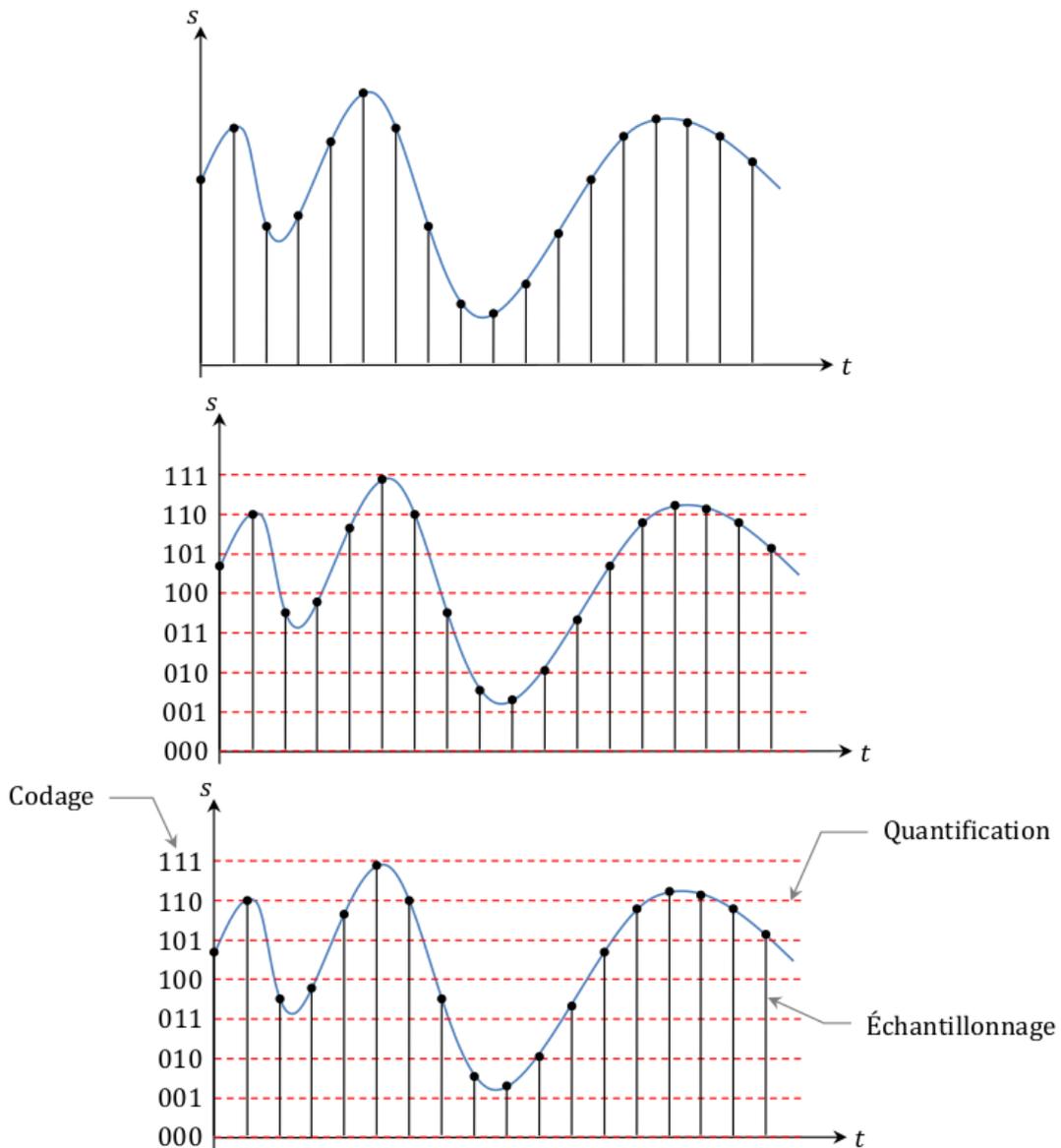
**Interprétation énergétique :** la puissance en régime périodique est la somme des puissances des harmoniques successives.

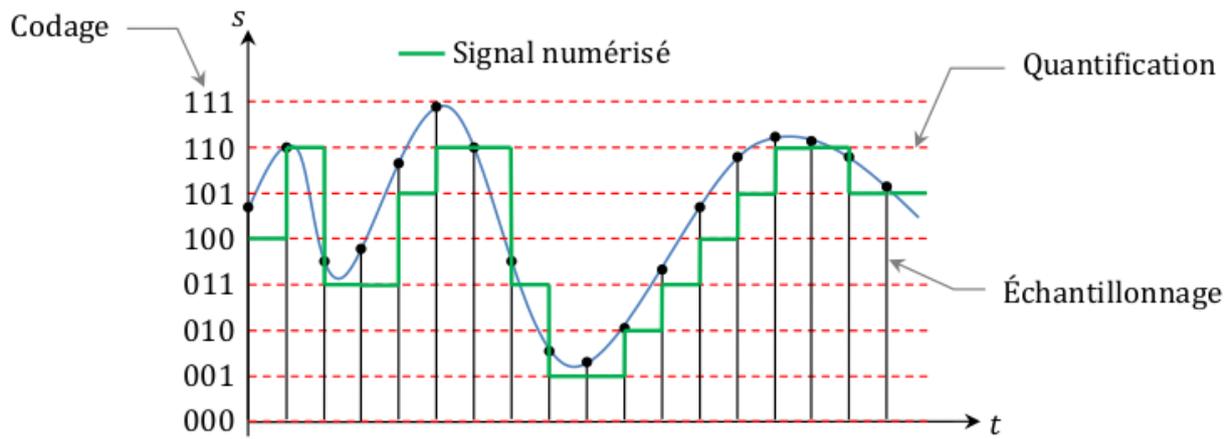
### III- Numérisation d'un signal

Lorsqu'on cherche à mesurer une grandeur physique (onde de pression sonore, onde électromagnétique, température, etc.) on utilise en général un capteur dont le rôle est de convertir le signal physique en un signal électrique qui est donc une fonction continue du temps (au sens mathématique) image des variations temporelles de la grandeur physique étudiée. Ce type de signal est qualifié d'analogique par opposition à un signal numérique.

L'opération de numérisation correspond à la succession de 3 étapes schématisées sur la figure suivante :

- l'échantillonnage (sampling en anglais) qui permet de prélever un ensemble de valeurs (appelées échantillons) prises à des instants discrets ;
- la quantification qui alloue à chacun de ces échantillons une valeur approchée (et qui correspond à une discrétisation des valeurs du signal) ;
- le codage qui consiste à coder en binaire sur un nombre fini de bits chaque niveau quantifié.





**Figure 1 : Échantillonnage, quantification et codage d'un signal**

La plage de valeurs que le signal d'entrée est susceptible de prendre est déterminée par le calibre  $C$ . Elle doit être supérieure à la valeur que l'on cherche à mesurer, sinon on observe un phénomène de saturation.

La plage des valeurs de sorties s'étend sur  $\pm C$  et est divisée en  $2^n - 1$  intervalles de largeurs identiques car la mesure est codée en binaire sur  $n$  bits.

### 1 - Codage des valeurs quantifiées

L'objectif est de déterminer le nombre de bits de codage  $n$  de la carte d'acquisition.

☞ Déterminer la relation entre  $C$  le calibre d'entrée, le nombre de bits de codage  $n$  et le pas  $p$  de la quantification.

- ✕ Proposer un protocole expérimental pour déterminer  $n$ .
- ✕ Le mettre en œuvre pour les différents calibres d'entrée (clic droit sur EA0)

### 2 - Fréquence d'échantillonnage

Lors de l'acquisition d'un signal, vous devez régler la fréquence d'échantillonnage en choisissant :

- Nombre de points  $N$  : il s'agit du nombre total de points d'échantillonnage.
- Période d'échantillonnage  $T_e$  : c'est la durée entre deux échantillons.

Dans LatisPro il y a un troisième paramètre : la durée totale d'acquisition  $T_{tot}$ . Ces trois paramètres sont liés par la relation :

.....

On notera que la période d'échantillonnage  $T_e$  et la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  sont liées par la relation

$$f_e = \frac{1}{T_e}$$

Cette fréquence est le premier paramètre à fixer sur un logiciel d'acquisition de signaux sur ordinateur, et il est généralement imposé par le constructeur pour les oscilloscopes numériques.

Lors de l'échantillonnage il y a évidemment une perte d'information, et on voudrait, dans l'idéal, avoir une période d'échantillonnage  $T_e$  très courte (ou  $f_e$  très élevée) pour ne pas perdre d'information. Mais :

- Ceci a un coût en terme de quantité de données : plus  $T_e$  est petit, plus il faudra de points, plus il faudra d'espace de stockage.
- Si  $T_{tot}$  est la durée totale de l'acquisition et  $N$  le nombre total de points du signal numérisé,  $T_e$  est limitée par  $N_{max}$ .

- La matériel utilisé possède toujours une limite en fréquence d'acquisition. Par exemple la carte d'acquisition ou l'oscilloscope possèdent une fréquence d'échantillonnage maximale qu'ils ne peuvent pas dépasser.

On voudra donc, en pratique, prendre une fréquence d'échantillonnage  $f_e$  la plus petite possible, sans toutefois perdre d'informations sur le signal.

Étant donné un signal  $s(t)$ , la question est donc de savoir quelle est la plus petite fréquence d'échantillonnage admissible pour numériser le signal sans perdre d'informations.

✘ Grâce au GBF, envoyer un signal sinusoïdal de fréquence  $f_0 = 1,0 \cdot 10^3$  Hz sur la carte d'acquisition relié à l'ordinateur. Avec LatisPro, enregistrer le signal sur 15 périodes (fixer  $T_{tot}$ ).

Observer le signal pour différentes valeurs de périodes d'échantillonnage :

| fréquence (Hz) | $1,0 \cdot 10^5$ | $1,0 \cdot 10^4$ | $5,0 \cdot 10^3$ | $2,0 \cdot 10^3$ | $1,66 \cdot 10^3$ | $1,05 \cdot 10^3$ | $1,0 \cdot 10^3$ |
|----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|------------------|
| $N$            |                  |                  |                  |                  |                   |                   |                  |
| Observation    | .                | .                | .                | .                | .                 | .                 | .                |

✎ Conclusion : .....

.....

## IV- Spectre d'un signal numérique

### 1 - Spectre d'un signal numérique sinusoïdal

#### a) Allure, influence de la fenêtre de calcul

La fenêtre de calcul du spectre est la portion du signal  $s(t)$  sur laquelle le calcul du spectre est effectué par le logiciel. On étudie ici l'influence du choix de cette fenêtre.

✘ Produire le signal  $s(t)$  à l'aide d'un GBF (fréquence 100 Hz), puis à l'aide de la carte d'acquisition et du logiciel LatisPro réaliser une acquisition numérique de ce signal.

On prendra une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 10$  kHz et un nombre total de points égal (ou proche de) 1024. Pour des raisons techniques le logiciel calcule les spectres sur des ensembles de points qui sont des puissances de 2, et pour cela ajuste légèrement  $f_e$  sans nous le dire ; si on ne veut pas que ce soit le cas, il faut nous même choisir un nombre de points qui est une puissance de 2 (notons que c'est habituellement sans importance, sauf dans ce TP où nous voulons étudier précisément l'influence de  $f_e$ ).

Ceci donne une durée totale d'acquisition  $T_{tot} \simeq 100$  ms, soit une dizaine de périodes, ce qui est suffisamment grand pour calculer un spectre.

✘ Toujours avec LatisPro, réaliser le spectre en amplitude du signal numérisé. Après calcul, le spectre est normalement affiché par défaut entre 0 et  $f_e/2$ .

✎ Reproduire schématiquement ce spectre sur votre feuille.

.....  
 .....

Est-il conforme au spectre attendu ?

.....

Sur l'écran le logiciel affiche en gris la partie de la courbe qu'il exclue pour le calcul du spectre, et en bleu la partie de la courbe sur laquelle il effectue le calcul. Que remarque-t-on ?

.....

✘ Changer la fenêtre du signal sur laquelle le calcul du spectre est effectué : mettre Sélection de période non pas sur automatique mais sur manuel, et sélectionner manuellement la fenêtre au hasard. Faire différents essais. Noter les changements sur le spectre.

☞ Conclure sur l'origine des pics parasites obtenus, et sur la condition à respecter pour ne pas les avoir.

.....  
 .....

**b) Le phénomène de repliement de spectre, critère sur la fréquence d'échantillonnage**

On considère toujours le même signal et la même acquisition.

✘ Afficher cette fois le spectre pour des fréquences comprises entre 0 et  $f_e$ .

Prendre une Sélection de période manuelle sur tout le signal, et surveiller que le nombre de points est proche de 1024 (par exemple 1020 points,  $T_e = 100 \mu s$  donc  $f_e = 10 \text{ kHz}$ , total de 102 ms).

☞ Représenter le spectre obtenu. Qu'est-ce qui est surprenant ?

.....  
 .....

✘ Passer en mode d'acquisition permanente (Mode permanent) tout en affichant encore le spectre. Faire varier la fréquence de  $s(t)$  (aller jusqu'à 3 ou 4 kHz pour bien voir).

☞ Noter vos observations et proposer une formule qui donne la fréquence  $f$  du "pic parasite" en fonction de  $f_0$  et de  $f_e$ .

.....  
 .....

.....  
 .....

Si l'on pouvait forcer Latis Pro à afficher le spectre sur une gamme de fréquences plus large, on observerait le spectre suivant pour le signal  $s(t)$  :

.....  
 .....

**c) Le critère de Shannon pour éviter le repliement de spectre**

Lorsqu'un pic parasite apparaît entre 0 et  $f_0$ , on dit qu'il y a repliement de spectre. C'est un cas très gênant, car si le signal  $s(t)$  est inconnu, on ne sait pas si ce pic est réellement parasite ou s'il est contenu dans le signal  $s(t)$ . Il faut donc éviter d'être dans une telle situation.

✘ Essayer par exemple de prendre une fréquence  $f_0 = 7$  kHz pour  $s(t)$ . Le spectre observé est-il correct ?

.....

↳ À quelle condition sur  $f_0$  et  $f_e$  est-on certain que le pic parasite observé précédemment reste en dehors de la plage  $[0, f_0]$  ?

.....

On appelle cette condition le critère de Shannon. On vient donc de le démontrer pour un signal monochromatique, et il peut s'énoncer ainsi :

✘ Lorsque le critère de Shannon est tout juste vérifié, combien y a-t-il de points par période? .....

La fréquence d'échantillonnage d'un signal analogique  $f_e$  doit être supérieure au moins à deux fois la fréquence maximale  $f_{\max}$  contenue dans le spectre du signal analogique pour que le signal numérique contienne toutes les fréquences du signal analogique. Il s'agit du **critère de Shannon-Nyquist**. On retiendra

$$f_e > 2f_{\max}.$$

Le **repliement de spectre** (ou aliasing en anglais) est un phénomène qui introduit dans un signal échantillonné des fréquences qui ne devraient pas s'y trouver lorsque le critère de Nyquist-Shannon n'est pas respecté.

**2 - Spectre d'un signal périodique non monochromatique**