

I Mesures de champ magnétique

Dans ce problème sont abordées deux méthodes de mesure de champs magnétiques, permanents ou éventuellement lentement variables dans le temps. Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple \vec{B} pour le champ magnétique ; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple \hat{u} tel que $\|\hat{u}\| = 1$. Le référentiel terrestre sera considéré comme galiléen. On rappelle que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

1. Balance de Cotton

La photo d'un modèle de balance de Cotton est placée ci-contre. Ce type de balance, destinée à la mesure de champ magnétique, a été mis au point par Aimé Cotton en 1900. Elle est constituée de deux fléaux. L'un, à gauche, comprend sur sa périphérie, un conducteur métallique qui sera parcouru par un courant et dont une partie sera placée dans le champ magnétique, uniforme et permanent, à mesurer. Le conducteur sera soumis à des forces de Laplace et la balance penchera du côté de ce fléau. L'autre comporte un plateau sur lequel on peut déposer des masses marquées pour équilibrer la balance et déduire ainsi la norme du champ magnétique. Le schéma de principe de la balance est représenté sur la figure 1.

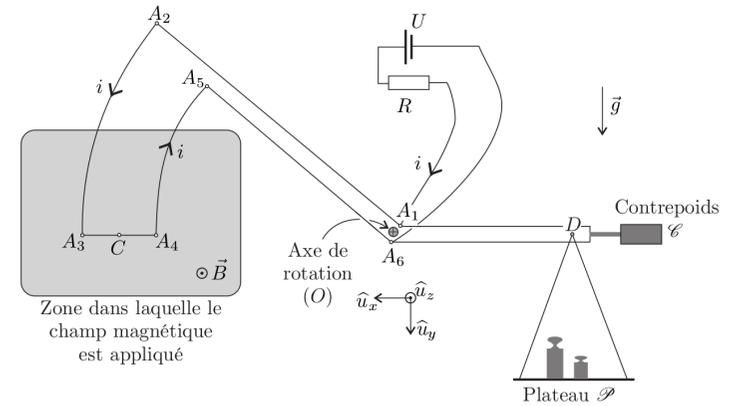


FIGURE 1 – Schéma de principe de la balance

Sur le fléau dessiné à gauche, les conducteurs permettent le passage d'un courant d'intensité i , selon le parcours $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6$. Les portions de circuit A_2A_3 et A_4A_5 sont des arcs de cercle de même centre O . L'ensemble des deux fléaux constitue un système rigide, mobile sans frottement, autour d'un axe horizontal passant par le point O et noté Oz . On désigne par C le milieu du segment A_3A_4 et D le point de suspension du plateau. On note d_1 la distance OC entre les points O et C , d_2 la distance OD entre les points O et D et ℓ la longueur du segment A_3A_4 .

La procédure de mesure est la suivante :

1. Équilibrage « à vide » : en l'absence de courant i et de masses marquées dans le plateau, le contrepoids \mathcal{E} est déplacé de façon à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points C , O et D étant alignés sur l'horizontale.
2. Mesure du champ : on ferme le circuit électrique, ce qui permet au courant d'intensité i de circuler « dans la balance », le fléau de gauche penche vers le bas ; on ajoute alors des masses dans le plateau jusqu'à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points C , O et D étant alignés sur l'horizontale.

Q1. Montrer que, lorsque l'équilibrage à vide est réalisé, le centre de masse, G , des parties mobiles de la balance est situé en O .

Q2. Lorsque le courant circule « dans la balance », montrer que le moment

résultant en O des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.

- Q3.** À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en O des forces de Laplace. En déduire la relation liant $B = \|\vec{B}\|$, la somme m des masses marquées posées sur le plateau, i , ℓ , d_1 , d_2 et le module g du champ de pesanteur \vec{g} .
- Q4.** La sensibilité de la balance étant de $\delta m = 0,05$ g, déterminer la plus petite valeur de B mesurable pour $i = 10$ A, $g = 10$ m.s⁻², $\ell = 5$ cm et $d_1 = d_2 = 10$ cm. En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.

2. Utilisation d'une boussole

Dans cette partie on utilise une boussole constituée d'une aiguille aimantée mobile, présentant un axe de symétrie longitudinal. Cette aiguille peut pivoter sans frottement autour d'un axe passant par son centre de masse G et perpendiculaire à l'axe de symétrie. La liaison avec l'axe est du type « pivot parfait » sans frottement.



FIGURE 2 - La Boussole

Cette aiguille aimantée se comporte comme un dipôle magnétique de moment magnétique \vec{M}_m ayant la direction de l'axe de symétrie de celle-ci. Cette boussole est placée dans un champ magnétique \vec{B} , permanent et localement uniforme (il est considéré comme uniforme tout le long de l'aiguille aimantée). Les forces magnétiques soumettent la boussole à un couple $\vec{\Gamma} = \vec{M}_m \wedge \vec{B}$. On note J le moment d'inertie de l'aiguille aimantée par rapport à l'axe de rotation. Dans un premier temps nous allons étudier les petits mouvements de l'aiguille autour de sa position d'équilibre stable, en négligeant les frottements fluides dus à l'air. Le champ magnétique et l'axe de symétrie de l'aiguille sont dans un plan horizontal. On appelle α l'angle entre la direction de \vec{B} et celle de \vec{M}_m .

- Q5.** Après avoir exprimé le couple des forces magnétiques s'exerçant sur

l'aiguille en fonction des paramètres du problème que sont $B = \|\vec{B}\|$, $M_m = \|\vec{M}_m\|$ et α , établir l'équation différentielle dont α est solution. En déduire les positions d'équilibres de l'aiguille, et indiquer sans calcul l'équilibre stable. En supposant $\alpha \ll 1$, donner l'expression de $\alpha(t)$ en notant α_0 la valeur maximale de cet angle, en faisant apparaître le rapport $\kappa = \frac{M_m}{J}$ et en supposant que $\frac{d\alpha}{dt}(t=0) = 0$ rad.s⁻¹.

On cherche à mesurer le rapport κ . Pour cela on mesure la période des petites oscillations de l'aiguille aimantée placée dans un champ magnétique uniforme connu, créé par des bobines de Helmholtz. Les bobines de Helmholtz sont constituées de deux bobines plates, c'est-à-dire d'épaisseurs négligeables, identiques et équidistantes. Chacune d'entre elles comprend N spires circulaires de rayon R , parcourues par le même courant d'intensité I et dont le sens est indiqué sur la figure 3. Ces deux bobines sont distantes de $d = R$. L'axe Ox de révolution des spires a pour origine le point O tel que les bobines soient équidistantes de celui-ci.

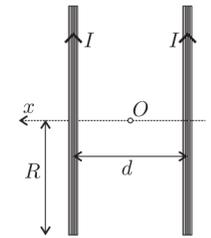


FIG. 3 - Bobines de Helmholtz

On montre qu'en un point M situé à l'abscisse x , sur l'axe Ox , le champ de Helmholtz magnétique $\vec{B}(x)$ créé par les bobines s'écrit :

$$\vec{B}(x) = N\vec{B}_0 \left\{ \left[1 + \left(\frac{x}{R} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\frac{x}{R} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\}$$

- Q6.** La quantité $B_0 = \|\vec{B}_0\|$ s'exprime en fonction de μ_0 , R et I . Par comparaison avec d'autres champs magnétiques, choisir en justifiant précisément ce choix, l'expression de B_0 parmi les suivantes :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad B_0 = \frac{\mu_0 R}{2I} \quad B_0 = \frac{\mu_0 I R}{2} \quad B_0 = \frac{I R}{2\mu_0}$$

- Q7.** Les bobines ont un rayon $R = 15$ cm. On donne le développement limité suivant

$$\left[1 + \left(X \pm \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3/2} = \frac{8}{5\sqrt{5}} \left[1 \mp \frac{6}{5}X \pm \frac{32}{25}X^3 - \frac{144}{125}X^4 + o(X^4)\right]$$

Dans quelle zone située sur l'axe Ox , peut-on considérer que la variation relative de la norme du champ est inférieure à 2% ? Préciser la valeur numérique de cette norme sachant que $N = 50$ spires et $I = 4$ A ?

- Q8.** La valeur mesurée de la période des petites oscillations de l'aiguille aimantée est $T = 0,30$ s. Déterminer l'unité et calculer la valeur numérique du rapport κ pour cette boussole.