

Donc, en régime stationnaire $\text{div } \vec{j}_N = 0$ ($\frac{\partial n_{\text{vap}}}{\partial t} = 0$)

Soit le système = sol sec compris en z et $z+dz$ de base S .

$$\oint_{\text{portant}} \vec{j}_N(z) \cdot d\vec{S} = \iiint_{H \in \Sigma} \text{div } \vec{j}_N d\tau = 0$$

Optusgradskai

$$\text{or } 0 = \oint \vec{j}_N(z) \cdot d\vec{S}_{\text{portant}} = -j_N(z)S + j_N(z+dz)S$$

$$= \Phi_S(z+dz) - \Phi_S(z)$$

donc $\frac{d\Phi_S}{dz} = 0$ Φ_S est uniforme.

Q5. Pour $z_m(t) < z < H$.

$$\Phi_S(z) = \text{cte} = j_N(z)S$$

$$\text{avec } \vec{j}_N = -D \vec{\text{grad}} n_{\text{vap}}(z)$$

$$= -D \frac{dn_{\text{vap}}}{dz} \vec{e}_z$$

$$\text{Donc } \frac{dn_{\text{vap}}(z)}{dz} = \text{cte} = -\frac{\Phi_S}{SD} = A$$

$$n_{\text{vap}}(z) = Az + B$$

$$\text{avec } n_{\text{vap}}(z_m(t)) = Az_m(t) + B$$

$$= -\frac{\Phi_S}{SD} z_m(t) + B$$

D'où $n_{\text{vap}}(z) = n_{\text{vap}}(z_m(t)) + \frac{\Phi_S}{SD} (z_m(t) - z)$

Q6. En $z = z_m(t)$ on a $\text{H}_2\text{O}_l \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O}_g$

$$\text{donc } P(z_m(t)) = P_{\text{sat}}(T) = \frac{nRT}{V}$$

$$= \frac{N_{\text{H}_2\text{O}_g} RT}{V d_A}$$

$$= d_A n_{\text{vap}}(z_m(t)) RT$$

Il vient

$$n_{\text{vap}}(z_m(t)) = \frac{P_{\text{sat}}(T)}{RT} d_A$$

Q7. On a donc

$$n_{\text{vap}}(z) = \frac{d_A P_{\text{sat}}(T)}{RT} - \frac{\Phi_S}{SD} (z - z_m(t))$$

Q8. D'après l'équation d'état des gaz parfaits

$$P(H) = \frac{n_{\text{vap}}(H) RT}{d_A}$$

$$P(H) = P_{\text{sat}}(T) - \frac{\Phi_S}{SD} \frac{RT}{d_A} (H - z_m(t))$$

Q9. Il doit y avoir continuité du flux des molécules d'eau à l'interface sol-atmosphère

On a donc

$$\Phi_S = h (P(H) - P_{\text{ext}}) S$$

$$\text{soit } \Phi_S = Sh [P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}}] - h \frac{\Phi_S}{SD} \frac{RT}{d_A} (H - z_m(t))$$

$$\Phi_S = \frac{Sh (P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}})}{1 + \frac{RT}{SD} (H - z_m(t)) h}$$

Q10. Pour $z = z_m(t)$, entre t et $t+dt$

$$\frac{\dot{z}}{z_m(t)} \frac{m_{\text{vap}}(z_m(t))}{m_{\text{liq}}} - \frac{\dot{z}}{z_m(t+dt)} \frac{m_{\text{vap}}(z_m(t+dt))}{m_{\text{liq}}} = \frac{P_{\text{sat}}(T) d_A}{RT} \ll m_{\text{liq}}$$

$$N(t+dt) = n_{\text{vap}}(z_m(t+dt)) S dz$$

$$N(t) = m_{\text{liq}} S dz$$

Il vient, $dN = N(t+dt) - N(t)$

$$= -m_{liq} S \cdot dz$$

$$= +m_{liq} S \frac{dz_m}{dt} dt$$

car $dz = z_m(t) - z_m(t+dt) = -\frac{dz_m}{dt} dt$

De plus $dN = -\delta N_s$

$$= -\Phi_s dt$$

D'où $\frac{dz_m}{dt} = -\frac{\Phi_s}{m_{liq} S}$ ← T^{-1} ← L^{-1} (OK)

Q11. On a $\Phi_s = -m_{liq} S \frac{dz_m}{dt}$

et $\Phi_s = \frac{Sh (P_{sat} - P_{ext})}{1 + \frac{RTk}{Dc_A} (H - z_m(t))}$

Soit $-m_{liq} S \frac{dz_m}{dt} = \frac{Sh (P_{sat} - P_{ext})}{1 + \frac{RTk}{Dc_A} (H - z_m(t))}$

$\Rightarrow \frac{dz_m}{dt} \left[1 + \frac{RTk}{Dc_A} (H - z_m(t)) \right] = \frac{Sh (P_{ext} - P_{sat})}{m_{liq} S}$

$\frac{dz_m}{dt} \left[1 + \frac{RTk}{Dc_A} (H - z_m(t)) \right] = \frac{k (P_{ext} - P_{sat}(T))}{m_{liq}}$

Q12. Soit $T_{séch}$ le temps de séchage

à $T_{séch}$ $z_m(T_{séch}) = 0$

On intègre l'expression précédente entre $t=0$ ($z_m(0) = H$) et $T_{séch}$:

$$-H \frac{RTk}{Dc_A} \frac{H^2}{2} + \frac{RTk}{Dc_A} \frac{H^2}{2} = k \frac{P_{ext} - P_{sat}(T)}{m_{liq}} T_{séch}$$

$\Rightarrow T_{séch} = \frac{H \left(1 + \frac{RTk}{Dc_A} \frac{H}{2} \right)}{k (P_{sat}(T) - P_{ext})} m_{liq}$

Q12. Il apparaît dans l'expression de $T_{séch}$ une longueur caractéristique $\frac{2Dc_A}{RTk}$.

On peut poser $H_{lim} = \frac{2Dc_A}{RTk}$

Q13. AN $H_{lim} = \frac{2 \times 56 \times 10^{-6} \times 6,02 \times 10^{23}}{8,31 \times 300 \times 56 \times 10^{-2}}$

$$= \frac{66^{18}}{4 \times 3 \times 6^{20}} \neq \frac{1}{2} 10^{-2}$$

$\neq 5 \text{ mm}$

Pour $H \ll H_{lim}$.

$T_{séch} = \frac{H m_{liq}}{k (P_{sat}(T) - P_{ext})} \propto H$ OK avec figure 3.

Le phénomène d'évaporation est déterminant

Pour $H \gg H_{lim}$.

$T_{séch} \approx \frac{H^2}{2} \frac{RT}{Dc_A} \frac{m_{liq}}{(P_{sat}(T) - P_{ext})}$

$H \rightarrow 1,5 H \quad \frac{9}{4} = 2,25 \quad \text{soit.}$

Deuxième partie

Imagerie des nanoparticules d'or

Extrait du concours Centrale-Supélec MP 2021

I - Equation de la diffusion thermique en géométrie sphérique

Q1. Le gel entourant la sphère d'or est considéré comme homogène et infini avec une température initiale uniforme. Le système étudié est donc à symétrie sphérique.
 T ne dépend spatialement que de r .

Q2. Σ étudié = coquille sphérique entre r et $r+dr$

D'après le 1^{er} principe entre t et $t+dt$ $dU = \delta Q$

$$C_g \int_{\Sigma} 4\pi r^2 dr \frac{\partial T}{\partial t} = 4\pi r^2 j_h(r,t) - 4\pi (r+dr)^2 j_h(r+dr, t)$$

Or d'après la loi de Fourier $\vec{j}_h(r,t) = -k \vec{\text{grad}} T(r,t)$
 $= -k \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$

$$\text{Soit } C_g \int_{\Sigma} 4\pi r^2 dr \frac{\partial T}{\partial t} = 4\pi \left(-\frac{\partial (j_h r^2)}{\partial r} \right) dr$$

$$C_g \frac{\partial T}{\partial t} = + \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

II - Température du milieu en régime stationnaire

Q3. On a $\frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = 0$ soit $T(r)$

$$\text{Il vient } \frac{d^2}{dr^2} (r T(r)) = 0$$

$$\text{ou } r T(r) = A r + B$$

$$\Rightarrow T(r) = A + \frac{B}{r} \quad \text{pour } r > 0$$

$$\text{avec } T(a^+) = A + \frac{B}{a} = T_S$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T(r) = T_0 = A$$

Soit $B = (T_S - T_0) a$

$$T(r) = T_0 + (T_S - T_0) \frac{a}{r}$$

Q4. Soit $P_{sph} \rightarrow$ milieu la puissance fournie au milieu par la nanosphère -

$$\begin{aligned} P_{sph \rightarrow \text{milieu}} &= 4\pi a^2 j_{th}(a) \\ &= 4\pi a^2 \left(-k \frac{\partial T}{\partial r}(a) \right) \\ &= 4\pi a^2 k \left(+ (T_S - T_0) \frac{a}{a^2} \right) \end{aligned}$$

$$P_{sph \rightarrow \text{milieu}} = 4\pi a k (T_S - T_0)$$

III - Température de surface de la nanosphère -

On a $P_{abo}(t) = P_0 (1 + \cos \Omega t)$

Q5. $\Sigma' =$ nanosphère

D'après le premier principe entre t et $t+dt$

$$dU = \delta Q$$

$$\text{avec } dU = C_{Au} \frac{4\pi a^3}{3} \frac{\partial T_S}{\partial t} dt$$

$$\text{or } \delta Q = (P_{abo}(t) - P_{sph \rightarrow \text{milieu}}) dt$$

Il vient

$$\frac{4\pi a^3}{3} C_{Au} \frac{\partial (\delta T_S)}{\partial t} = P_0 (1 + \cos \Omega t) - 4\pi a k \delta T_S$$

$$\frac{4\pi a^3}{3} C_{Au} \frac{\partial \delta T_S}{\partial t} + \delta T_S = \frac{P_{abo}}{4\pi k a}$$

$$\delta T_S + \tau \frac{\partial \delta T_S}{\partial t} = \frac{P_{abo}}{4\pi k a}$$

$$\text{avec } \tau = \frac{a^2 C_{Au}}{3k}$$

$$\begin{aligned} [\tau] &= \frac{L^2 [\text{énergie}] L^{-1} L^{-3}}{[3] [j_{th}] L^{-1}} \quad \text{avec } [j_{th}] L^2 = [\text{puissance}] \\ &= L^{-2} \frac{[\text{énergie}]}{[\text{puissance}]} L^2 \end{aligned}$$

$$[\tau] = \text{temps} \quad (\text{OK})$$

Q6. On a $\delta T_S + \tau \frac{\partial \delta T_S}{\partial t} = \frac{P_0}{4\pi k a} (1 + \cos \Omega t)$

$$\delta T_S(t) = A e^{-t/\tau} + \delta T_{S \text{ part}}$$

$$\text{avec } \delta T_{S \text{ part}} = \frac{P_0}{4\pi k a} + A \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\text{En RSF } \delta T_S (1 + j\Omega \tau) = \frac{P_0}{4\pi k a}$$

$$\delta T_S = \frac{P_0}{4\pi k a (1 + j\Omega \tau)}$$

$$\text{avec } \Omega \tau = 1,0 \cdot 10^{-3} \ll 1$$

Soit $\delta T_S \approx \frac{P_0}{4\pi k a} (1 + \cos \Omega t)$ pour $t \gg \Omega \tau$.

$$T_S(t) = T_0 + \frac{P_0}{4\pi k a} (1 + \cos \Omega t)$$

Q7. $\overline{\delta T_S} = \frac{P_0}{4\pi k a}$

AN $\overline{\delta T_S} = 5,0 \text{ K}$.

IV - Température du gel autour de la sphère -

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\alpha}{r} \left[1 + e^{-\frac{r-a}{\lambda_{th}}} \cos(\Omega t - \frac{r-a}{\lambda_{th}}) \right]$$

$$\lambda_{th} = \sqrt{\frac{2k}{\Omega c_g}}$$

Puis on applique dans injecteur les différentielles de la solution proposée.

Q8) r_{th} = longueur caractéristique de la poutre de l'onde thermique dans le gel.

Considérons

Q9) On a pour $\lambda = a^+$

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\alpha}{2} (1 + \cos 2\pi t)$$

$$= T_S(t) = T_0 + \frac{P_0}{4\pi K a} (1 + \cos 2\pi t)$$

D'où $\alpha = \frac{P_0}{4\pi K}$

Q10) $T(r, t) = T_0 + \frac{\alpha}{r} \left(1 + e^{-\frac{r-a}{r_{th}}} \cos \left(2\pi t - \frac{r-a}{r_{th}} \right) \right)$

On considère que $a \ll r_{th}$.

Moyenne sur le temps :

$$\langle T(r, t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} T(r, t) dt$$

$$= T_0 + \frac{\alpha}{r}$$

$\langle \delta T \rangle_t = \frac{\alpha}{r}$

Moyenne sur le volume de la sphère de rayon r_{th}

$$\overline{\delta T} = \frac{1}{\frac{4\pi}{3}(r_{th}^3 - a^3)} \int_{r=a}^{r=r_{th}} \langle \delta T \rangle_t 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{3}{r_{th}^3 - a^3} \int_a^{r_{th}} \alpha r dr$$

$$= \frac{3}{2} \alpha \frac{r_{th}^2 - a^2}{r_{th}^3 - a^3}$$

Pour $a \ll r_{th}$

$\overline{\delta T} = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{r_{th}}$

avec $\overline{\delta T}_S = \frac{P_0}{4\pi K a}$ et $\alpha = \frac{P_0}{4\pi K} = a \overline{\delta T}_S$

Il vient $\overline{\delta T} = \frac{3}{2} \frac{a}{r_{th}} \overline{\delta T}_S$

$r_{th} = 639 \text{ nm}$

AN: $\overline{\delta T} = 4,12 \text{ K}$

Q11) Pour révéler les faibles variations de l'indice optique du gel on peut utiliser en interférométrie de Michelson.

Troisième partie

Étude du circuit primaire d'une centrale nucléaire

Extrait de Centrale PSI 2024

1h15

35

Circuit primaire d'une centrale nucléaire

I - Evolution de la température dans le cœur des combustibles

1h2

Φ_1 Pour les N crayons $S_{tot} = N \cdot 2\pi \frac{d}{2} H$

$S_{tot} = N\pi d H$

1h3

Φ_2 On effectue un bilan thermique pour un cylindre creux de combustible entre r et $r+dr$ (hauteur H)
D'après le 1er principe entre t et $t+dt$
 $dU = \delta Q + \delta W$

avec $dU = 0$ en régime stationnaire
 $\delta Q = \Phi_{th \text{ entrant en } r} - \Phi_{th \text{ sortant en } r+dr} + P_v dr$
 $= j_{th}(r) 2\pi r H - j_{th}(r+dr) 2\pi (r+dr) H + P_v 2\pi r dr$
 $= - \frac{\partial r j_{th}}{\partial r} 2\pi H + P_v 2\pi r dr H$
 $\delta W = 0$

On a donc $\frac{d}{dr} (r j_{th}) = P_v r$

D'après la loi de Fourier $\vec{j}_{th} = -\frac{1}{2} \text{grad } T$

D'où $\frac{d}{dr} \left(r \left(-\frac{1}{2} \frac{dT}{dr} \right) \right) = P_v r$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{P_v}{\frac{1}{2}} r = 0$$

$$\boxed{A = \frac{P_v}{\frac{1}{2}}}$$

Q3) On a $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -Ar$

soit $r \frac{dT}{dr} = -A \frac{r^2}{2} + B$

Avec pour $r=0$ $B=0$

D'où $\frac{dT}{dr} = -\frac{A}{2} r$

T est de la forme $T(r) = -\frac{A}{4} r^2 + C$

Or $T(R_3) = T_2$ soit $T_2 = C - \frac{A}{4} R_3^2$

$$\boxed{T(r) = T_2 + \frac{P_v}{4 \frac{1}{2}} (R_3^2 - r^2)}$$

Q4) A l'interface $UO_2(s)/\text{gaine}$ il doit y avoir continuité des flux thermique.

Toute la puissance thermique engendrée

par les réactions de fission est évacuée en régime stationnaire

$$P_1 = h_2 (T_2 - T_3) 2\pi R_3 H N$$

D'où $\boxed{T_3 = T_2 - \frac{P_1}{2\pi \left(\frac{d}{2} - e \right) H N h_2}}$

Q4) Dans la gaine il n'y a pas de production de chaleur.

On a alors $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$

soit $r \frac{dT}{dr} = D$

T est de la forme $T(r) = D \ln r + E$

avec $T(R_3) = T_3 = D \ln R_3 + E$

et $T(R_4) = T_4 = D \ln R_4 + E$

D'où $D = \frac{T_4 - T_3}{\ln R_4 / R_3}$

$E = T_3 - \frac{T_4 - T_3}{\ln R_4 / R_3} \ln R_3$

$T(r) = T_3 + \frac{T_4 - T_3}{\ln R_4 / R_3} \ln \frac{r}{R_3}$

Puis on $\Phi_{th} = j_{th}(r) 2\pi r N H = \text{cte}$
cylindre hauteur NH
rayon r $= P_1$

06
22

Soit $j_h(r) = \frac{P_1}{2\pi r NH}$

or, d'après la loi de Fourier $j_h(r) = -\lambda_3 \frac{dT}{dr}$

On a donc $\frac{dT}{dr} = -\frac{P_1}{2\pi r \lambda_3 NH}$

$T(r) = -\frac{P_1}{2\pi \lambda_3 NH} \ln r + F$

avec $T(R_4) = T_4 = -\frac{P_1}{2\pi \lambda_3 NH} \ln R_4 + F$

$T(r) = T_4 - \frac{P_1 R_4}{\lambda_3 S_{tot}} \ln \frac{r}{R_4}$

06 Applications numériques

$S_{tot} = 4,52 \cdot 10^3 \text{ m}^2$

$T_4 = ?$ On a $P_1 = 2\pi R_4 NH \lambda_4 (T_4 - T_5)$

$T_4 = T_5 + \frac{P_1}{S_{tot} \lambda_4}$

$T_4 = 328^\circ\text{C}$

$T_3 = T_4 + \frac{P_1 R_4}{\lambda_3 S_{tot}} \ln \frac{R_4}{R_3}$ $T_3 = 352^\circ\text{C}$

$T_2 = 492^\circ\text{C}$

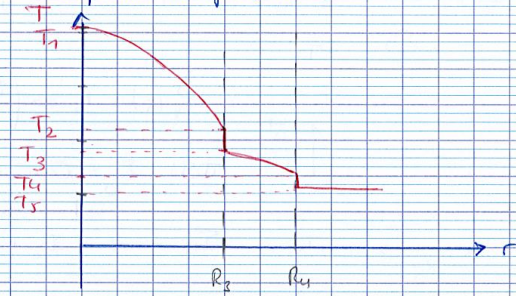
$T_1 = 838^\circ\text{C}$

$T_1 = T_2 + \frac{P_1 R_3}{NH \lambda_3 4 l_2}$

42

07

Profil de température

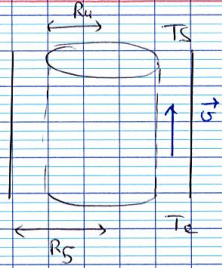


49

08

34

51

II. Pense exemple de dépendances angulaires

$$P_v(z) = P_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

03) $\Sigma_0 = \text{Eau entre } z \text{ et } z+dz$

Σ_1 à t $\Sigma_0 + \delta m_e$
↑ eau qui entre
entre t et $t+dt$

Σ_1 à $t+dt = \Sigma_0 + \text{eau qui sort de } \Sigma_0 \text{ entre } t \text{ et } t+dt$
D'après le 1er principe appliqué à Σ_1 entre t et $t+dt$

$$dU + dE_m = \delta Q + \delta W$$

↑ négligée

$$\text{avec } dU = U_{\Sigma_0}(t+dt) + U_{\Sigma_m} - U_{\Sigma_0}(t) - U_{\Sigma_m}$$

$$= 0 + \delta m_e u_s - \delta m_e u_e$$

↑
car stationnaire

$$\text{avec } \delta m_e - \delta m_s = D_m dt$$

$$dU = D_m dt c_p (T(z+dz) - T(z))$$

$$\text{et } \delta Q = \phi_{th} dt = P_v(z) \pi R_0^2 dz dt$$

$$\delta W = 0$$

$$\text{D'où } D_m c_p [T(z+dz) - T(z)] = P_v(z) \pi R_0^2 dz$$

59

21

$$\text{Q10. On a } D_m c_p \frac{dT}{dz} = P_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \pi R_0^2$$

$$\text{Soit } \frac{dT}{dz} = \frac{P_0 \pi R_0^2}{D_m c_p} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

$$T_s - T_e = \frac{P_0 \pi R_0^2 H}{D_m c_p} (-\cos \pi + \cos 0)$$

$$T_s - T_e = \frac{2 P_0 \pi R_0^2 H}{D_m c_p}$$

$$\text{On a } T(z) - T_e = \frac{P_0 \pi R_0^2}{D_m c_p} (-\cos \frac{\pi z}{H} + 1)$$

$$T(z) = T_e + \frac{T_s - T_e}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)\right)$$

Q11. Il y a continuité des flux sur une hauteur dz entre le combustible et l'eau

$$\text{Soit } P_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \pi R_0^2 dz = h_{cc} (T_p(z) - T(z)) \pi R_c dz$$

$$\text{soit } \frac{P_0 \pi R_0^2 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)}{h_{cc}} = T_p(z) - T_e - \frac{T_s - T_e}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)\right)$$

$$T_p(z) - T_e = \frac{T_s - T_e}{2} + \frac{T_e - T_s}{2} \cos \frac{\pi z}{H} + \frac{P_0 \pi R_0^2 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)}{h_{cc}}$$

$$\frac{T_p(z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi z}{H} + \frac{2 P_0 \pi R_0^2}{h_{cc} (T_s - T_e)} \sin \frac{\pi z}{H} \right]$$

$$\text{Soit } B = 1 \quad C = \frac{D_m c_p}{h_{cc} \pi R_0^2}$$

Q12. Pour le combustible, on considère stationnaire
 Σ_i = cylindre de rayon r et de hauteur dz entre

z et $z+dz$

D'après le 1^{er} principe

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$\text{avec } dU = 0 \quad \delta W = 0$$

$$\delta Q = -j_H(r) 2\pi r dz + P_v(z) \pi r^2 dz$$

$$\text{D'où } j_H(r) = P_v(z) \frac{r}{2}$$

36

$$\text{or, d'après la loi de Fourier } j_H = -\frac{1}{2} \text{ grad } T_c = -\frac{1}{2} \frac{\partial T_c}{\partial r} \vec{e}_r$$

échanges thermiques
 purement radiaux

$$\frac{\partial T_c}{\partial r} = -\frac{P_v(z)}{2L_2} r$$

$$T_c(r, z) = -\frac{P_0}{2L_2} \min \frac{\pi \beta}{H} \frac{r^2}{2} + f(z)$$

$$\text{avec } T_c(R_0, z) = T_p(z)$$

$$\text{Soit } -\frac{P_0}{4L_2} R_0^2 \min \frac{\pi \beta}{H} + f(z) = T_p(z)$$