

Première partie

Accélérographe mécanique

I Étude sommaire

1. Détermination des caractéristiques de l'oscillateur.①. $E = 0$ Σ_1 = solide S de centre de masse G en translation $R \notin R$ galiléenBilan des forces* le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ * la force de frotts visqueux $\vec{f} = -\beta\vec{v}$ * l'action de la bge $\vec{R} \perp \vec{e}$ la bge.* le ressort $\vec{T} = -k(l-b)\vec{e}_n$ D'après la 2^e loi de Newton

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f} + \vec{R} + \vec{T}$$

Selon $\vec{e}_n$ $m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - k(x)$

Selon $\vec{e}_3$ $0 = -mg + R$

Soit $\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

On pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ et on obtient

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

②. Eq. caractéristique associée: $r^2 + 4\lambda r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 < 0 \quad \text{car oscillations}$$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad \text{on pose } \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}$$

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$$

avec $x(0) = A \cos \varphi = x_0$.

$$\dot{x}(0) = 0 = A(-\lambda \cos \varphi - \Omega \sin \varphi)$$

soit $\tan \varphi = -\frac{1}{\Omega}$ avec $\cos \varphi > 0$

$$A^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = n_0^2 + \frac{1^2}{\Omega^2} n_0^2$$

$$A = n_0 \sqrt{1 + \frac{1^2}{\Omega^2}}$$

$$x(t) = n_0 \sqrt{1 + \frac{1^2}{\Omega^2}} e^{-\lambda t} \cos\left(\Omega t + \arctan\left(-\frac{1}{\Omega}\right)\right)$$

Autre forme de solution:

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A' \cos \Omega t + B' \sin \Omega t)$$

avec $x(0) = A' = n_0$

et $\dot{x}(0) = -\lambda A' + B' \Omega = 0$

soit $B' = \frac{\lambda n_0}{\Omega}$

$$x(t) = n_0 e^{-\lambda t} \left[\cos \Omega t + \frac{\lambda}{\Omega} \sin \Omega t \right]$$

3. $T = \text{pseudo période}$ $T = \frac{\Delta t}{\Omega}$ $T = 1,2 \text{ s}$
 $\Omega = 2\pi/T$ $\Omega = 5,2 \text{ rad/s}$ $\lambda = 0,29 \text{ s}^{-1}$

et $\delta = \text{décroissement logarithmique}$

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t+nT)} = \frac{1}{n} \ln \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda(t+nT)}} = \lambda$$

$$\delta = \lambda T = \lambda \ln \frac{n_0}{n_2} \quad \text{avec } n = 10$$

Soit $\lambda = 0,029 \text{ s}^{-1}$

et $\beta = 2m\lambda$

D'autre part $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$

Soit $\omega_0^2 = \lambda^2 + \left(\frac{T^2}{4\pi^2}\right)^{-1}$

$$k = m \left(\lambda^2 + \left(\frac{T^2}{4\pi^2}\right)^{-1} \right) \quad k = 2,7 \text{ N/m}$$

2 - Mesure d'une accélération

1. $\vec{OE}(t) = a \cos(\omega t) \vec{e}_x$

On se place dans le référentiel lié à E (en translation inertielle) $\Rightarrow$ on prend en compte la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{F}_{\text{ient}} = -m \vec{a}_{\text{ent}} = +m a \omega^2 \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

Repère $(E \vec{e}_x \vec{e}_y \vec{e}_z)$

D'après la 2^e loi de Newton en référentiel non galiléen

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F}_{\text{ient}}$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$m \ddot{x} = -kx - \beta \dot{x} + m a \omega^2 \cos(\omega t)$$

Soit

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = a \omega^2 \cos(\omega t)$$

2. En RSF $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$

En notation complexe $x(t) = \underline{x} e^{j\omega t}$

$\underline{x}$ est telle que

$$(j\omega)^2 \underline{x} + 2\lambda j\omega \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = a \omega^2$$

$$\underline{x} = \frac{a \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\lambda \omega}$$

$$|\underline{x}| = \frac{a \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2}}$$

$$\arg(\underline{x}) = \frac{-\pi}{2} - \arctan \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\lambda \omega} = -\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\lambda \omega}$$

$$x(t) = a \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}\right)$$

3) $X_0 = |x|$

$$X_0(u) = a \frac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\beta^2 u^2}} \quad \text{avec } u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\text{Soit } y = \frac{X_0}{a} = \frac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\beta^2 u^2}}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} y = 0 \quad \lim_{u \rightarrow \infty} y = 1 \quad \text{ok.}$$

Le maximum de cette courbe représente la résonance.

Non, cette situation ne se présente pas toujours.

Pour $\omega = 7 \text{ rad.s}^{-1}$ soit $u = 1,3$.

On obtient $y = 1,6$ soit $a = 12 \text{ cm}$.

4) Par déf $J = \vec{f} \cdot \vec{v}$

$$= -\beta \dot{x}^2$$

$$= -\beta X_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\text{Soit } \langle J \rangle = -\frac{1}{2} \beta X_0^2$$

$$\text{AN: } \langle J \rangle \approx -0,1 \text{ mW.}$$

II Accélération radiale d'un satellite.

1) On étudie le mouvement du satellite S dans le référentiel géocentrique galiléen. Il est soumis à l'interaction gravitationnelle exercée par la terre $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -g \frac{M_T m_S}{R^2} \vec{e}_r$$

avec $g = g \frac{M_T}{R^2}$ soit $\vec{F} = -m_S g \frac{R^2}{r_0^2} \vec{e}_r$

puisque $r_0 = OS$.

a) Le mouvement du satellite étant circulaire on a

$$\vec{a} = -\frac{v_0^2}{r_0} \vec{e}_r$$

D'après la 2^{de} loi de Newton $m \vec{a} = \vec{F}$

$$\text{D'où } -m_S \frac{v_0^2}{r_0} = -m_S g \frac{R^2}{r_0^2}$$

$$v_0 = \sqrt{g \frac{R^2}{r_0}}$$

b) Soit T_0 la période de révolution du satellite. Le mouvement du satellite étant uniforme, on a

$$T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0} \quad T_0 = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{r_0}{g R^2}}$$

$$T_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_0^3}{g R^2}}$$

Application numérique :

$$r_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{T_0^2 \cdot g \cdot R^2}{4\pi^2}}$$

$$T_0 = 12 \text{ h.}$$

$$\omega_0 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1} \text{ vitesse angulaire}$$

$$r_0 = 27 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$\omega_0 = \sqrt{g \frac{R^2}{r_0}} = r_0 \omega_0$$

$$\omega_0 = 3,9 \text{ km s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt[3]{\frac{g R^2}{T_0}} 2\pi$$

2. On étudie le mouvement de M dans le référentiel du satellite S non galiléen. Le référentiel R_S est en rotation circulaire uniforme par rapport à R_g galiléen.

M est soumis à :

* l'interaction gravitationnelle exercée par la Terre.

$$\vec{F} = -g \frac{M_1 m}{(r_0 + x)^2} \vec{e}_r$$

* l'action de l'axe $\vec{R} \perp \vec{a} \vec{e}_r$ (absence de frottement)

* $\vec{f}$ force élastique dérivant de $E_p(x)$

$$\vec{f} = -g \vec{a} E_p(x) \quad \vec{f} = f(x) \vec{e}_r$$

$$f(x) dx = -dE_p$$

$$f(x) = -\frac{dE_p}{dx} = -m\omega_1^2 x$$

* $\vec{f}_{\text{fient}}$ force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_{\text{fient}} = -m \vec{a}_{\text{ent}}$$

$$= -m (-\omega_0^2 (r_0 + x) \vec{e}_r)$$

$$= m\omega_0^2 (r_0 + x) \vec{e}_r$$

* $\vec{f}_{\text{ie}}$ force d'inertie de Coriolis

$$\vec{f}_{\text{ie}} = -m \vec{a}_e$$

$$= -2m \omega_0 \vec{e}_g \wedge \dot{x} \vec{e}_r$$

$$= -2m\omega_0 \dot{x} \vec{e}_g$$

D'après le principe fondamental de la dynamique on a :

$$m \vec{a} = \vec{F} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{f}_{\text{fient}} + \vec{f}_{\text{ie}}$$

Selon $\vec{e}_r$: $m \ddot{x} = -\frac{g R^2 m}{(r_0 + x)^2} - m\omega_1^2 x + m\omega_0^2 (r_0 + x)$

$$\ddot{x} + (\omega_1^2 - \omega_0^2) x + \frac{g R^2}{(r_0 + x)^2} = \omega_0^2 r_0$$

b. $x \ll r_0$ $\frac{1}{(r_0 + x)^2} = \frac{1}{r_0^2 (1 + \frac{x}{r_0})^2}$

$$= \frac{1}{r_0^2} \left[\left(1 - \frac{2x}{r_0} \right) + o\left(\frac{x}{r_0}\right) \right]$$

et $\frac{g R^2}{r_0^2} = \frac{\omega_0^2}{r_0} = \omega_0^2 r_0$.

Equation du mouvement approchée :

$$\ddot{x} + (\omega_1^2 - \omega_0^2) x + r_0 \omega_0^2 \left(1 - \frac{2x}{r_0} \right) = r_0 \omega_0^2$$

$$\ddot{x} + (\omega_1^2 - 3\omega_0^2) x = 0$$

c. On a $\omega_1 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}$ et $\omega_0 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad s}^{-1} \ll \omega_1$.
 $\omega_1^2 - 3\omega_0^2 > 0$ M oscille (équation différentielle d'un oscillateur harmonique)

ω_p = pulsation des oscillations

$$\omega_p = \sqrt{\omega_1^2 - 3\omega_0^2} = \omega_1 \left[1 - 3\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 \right]^{1/2}$$

avec $\frac{\omega_0}{\omega_1} \ll 1$.

$\omega_p \approx \omega_1$ la période de

révolution n'est pas affectée par la révolution du satellite

d. S'il existe une accélération radiale du satellite alors

elle apparaît dans la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_{\text{inert}} = m \omega_0^2 (r_0 + z) \vec{e}_r \rightarrow a_r \vec{e}_r.$$

⇒ modification de la position d'équilibre

$$\ddot{z} + (\omega_1^2 - 3\omega_0^2) z = -a_r$$

$$\ddot{z} + \omega_p^2 z = \omega_p^2 z_{\text{eq}} \quad z_{\text{eq}} = \frac{-a_r}{\omega_p^2}$$

$$\text{ou } a_r = -\omega_p^2 z_{\text{eq}}.$$

Ce dispositif permet de mesurer l'accélération radiale du satellite.