

Première partie

Un modèle simplifié de génératrice linéaire : le rail de Laplace

I - Présentation du système

1. Avec une force constante le curseur doit se déplacer linéairement. Mais le flux de $\vec{B}$ augmentant dans le circuit déformable, il y a opposition d'un courant induit et d'une force de Laplace qui va s'opposer à $\vec{F}$. On tend vers une intensité constante *la di. élang*

2. Par définition $\vec{F}_L = i \vec{MN} \wedge \vec{B} = iLB \vec{e}_x$
avec i de N vers M . *la di. élang* $i < 0$.

3. cf schéma

II - Etude temporelle

4. D'après la loi de Faraday $e = -\frac{d\Phi}{dt}$
avec Φ le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit orienté
 $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ $\vec{B} = B\vec{e}_z$
 $S = L\pi\vec{e}_z$

d'où $e = -BLv$

5. D'après la loi des mailles $e = Ri$ (EE)

6. On étudie le mouvement de la tige MN dans le référentiel des rails galiléen.

La tige est soumise à

- $\vec{P}$ son poids en G
- $\vec{R}_M$ et $\vec{R}_N$ les réactions des rails

• $\vec{F}$ et $\vec{F}_L$

D'après le théorème de la résultante cinétique
 $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R}_M + \vec{R}_N + \vec{F} + \vec{F}_L$

Selon $\vec{u}_x$ $\boxed{m \frac{dv}{dt} = F + iLB}$ (EN)

car $\vec{F}_L = iLB\vec{e}_x$

7. EE : $-vLB = Ri$

EN : $iLB = m \frac{dv}{dt} - F$

Soit $-vLB = \frac{Rm}{LB} \frac{dv}{dt} - \frac{FR}{LB}$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{L^2 B^2}{Rm} v = \frac{F}{m}}$$

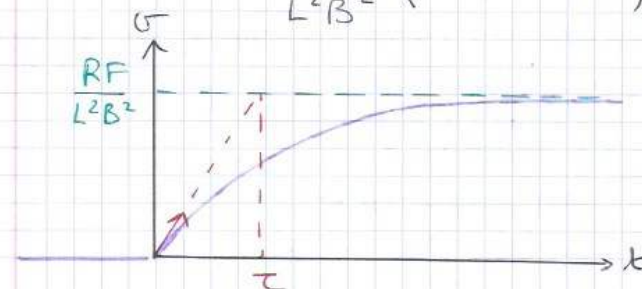
8. $\frac{mR}{B^2 L^2}$ est homogène à un temps

9. On a $v(t) = \frac{RF}{L^2 B^2} + A e^{-t/\tau}$

avec $\tau = \frac{mR}{L^2 B^2}$

Or, à $t=0$ $v(0)=0 \Rightarrow A = -RF/L^2 B^2$

$$v(t) = \frac{RF}{L^2 B^2} (1 - e^{-t/\tau})$$



En accord avec la question 1

III Bilan de puissance

10) On a $P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v}$ avec $a = -\frac{vLB}{R}$
 $P_L = -iLBv$ $P_L = -\frac{L^2 B^2 v^2}{R} < 0$

11) $P_J = Ri^2(t) = R \frac{v^2 L^2 B^2}{R^2}$
 ou $P_J = i(t) \cdot e(t) = -BLv i$

On a $P_J + P_L = 0$ Conversion électromécanique de puissance parfaite

12) $P_{op} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv$

13) (EN) : $\left(m \frac{dv}{dt} = F + iLB\right) \cdot v$

$\underbrace{\frac{dE_c}{dt}}_{P_c} = \underbrace{Fv}_{P_{op}} + \underbrace{iLvB}_{P_{lap}}$
 puissance cinétique

$P_{op} = \frac{dE_c}{dt} + Ri^2$ la puissance fournie par l'opérateur se retrouve sous forme de puissance cinétique et puissance électrique.

Deuxième partie

Transferts de charges par effet Hall

I - Présentation

1) On a $\vec{j} = nq\vec{v}$

II - Approche qualitative de l'effet Hall

2) Par définition $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ avec $d\vec{S}$ selon $\vec{e}_x$

et $I \geq 0$ $\vec{j}$ est selon $\vec{e}_x$

Pour les électrons $q = -e < 0 \Rightarrow \vec{v}$ est selon $-\vec{e}_x$

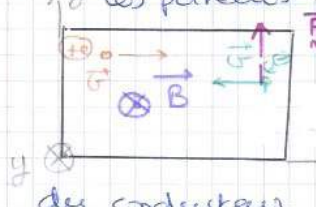
3) On a toujours $\vec{j}$ selon $\vec{e}_x$ et $q = e > 0 \Rightarrow \vec{v}$ selon $\vec{e}_x$

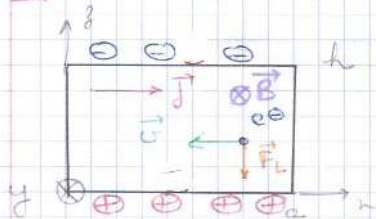
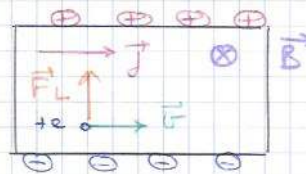
4) les porteurs de charge sont soumis à la force de Lorentz

$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

avec la partie magnétique $\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

les porteurs de charge subissent une force $\vec{F}_{mag}$ selon $\vec{e}_z \Rightarrow$ il y a accumulation de porteurs de charge sur les faces en $y=0$ et $y=h$ du conducteur



5] Pour les e^- Pour le cas $\sigma = +e$ III. Approche quantitative de l'effet Hall $q = -e$ 6] D'après la question 5 $\vec{E}_H$ est selon $+\vec{u}_3$ 7] Les porteurs de charge ayant un mouvement uniforme selon $\vec{u}_x$ ils subissent une force nulle selon $\vec{u}_3$. Or, $\vec{F}_L = -e \vec{v}_d \wedge \vec{B}$

$$\begin{aligned} \text{ils subissent} &= -e v_d \vec{u}_x \wedge B_0 \vec{u}_3 \\ &= -e v_d B_0 \vec{u}_3 \quad (\text{avec } v_d < 0) \end{aligned}$$

$$\text{or } \vec{F}_H = -e \vec{E}_H = -e E_H \vec{u}_3$$

$$\text{D'où } E_H = -e v_d B_0 \quad \text{avec } v_d < 0$$

On a

$$-e E_H + -e \vec{v}_d \wedge \vec{B}_0 = 0$$

$$\boxed{\vec{E}_H = -\vec{v}_d \wedge \vec{B}}$$

8] $E_H = -e v_d B_0$

$$\text{Or } \vec{j} = -e n_e v_d \vec{u}_x = j \vec{u}_x$$

$$\text{or } I = h b j$$

$$\text{Il vient } \boxed{E_H = + \frac{I}{h b} \cdot \frac{1}{n_e e} B_0}$$

10] On a $\vec{E} = -\text{grad } V$ ou $\vec{E} \cdot d\vec{OM} = -dV$

$$\begin{aligned} U_H = V(z=h) - V(z=0) &= \int_0^h dV \\ &= \int_0^h -\vec{E}_H \cdot d\vec{r} = \int_0^h -\frac{I B_0}{h b n_e e} dz \end{aligned}$$

$$U_H = -\frac{I B_0 h}{h b n_e e} = -\frac{I B_0}{b n_e e} < 0$$

VI. Applications numériques

11] On a $n_e = n_{Cu} = \frac{m_{Cu}}{M_{Cu}} \cdot \frac{dA}{V} = \frac{N_{Cu} dA}{M_{Cu}}$

$$U_H = -\frac{0,1 \cdot 0,1 \cdot 63,5 \cdot 10^{-3}}{0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 8,9 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}$$

$$U_H = -\frac{6,35}{2 \times 8,9 \times 6 \times 1,6} \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-23} \cdot 10^{19}$$

$$U_H = -\frac{10^{-7}}{27} \approx -4 \cdot 10^{-9} \text{ V}$$

12] C'est très faible.

13] Pour le germanium

$$|U_H| = + \frac{0,1 \times 0,1}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 7 \cdot 10^{22} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}$$

$$= \frac{1}{3,2 \times 7} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{+4-22+19}$$

$$\approx \frac{1}{20} \cdot 10^{-1} \approx 5 \text{ mV} \quad \text{Pour être mesurée}$$

les sondes à effet Hall utilisent des semi-conducteurs

Troisième partie

Cuivre et supraconductivité

Résistance électrique d'un conducteur ohmique

1. D'après la loi d'Ohm locale
- $\vec{j}_e = \gamma \vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}_e}{\gamma}$$

2. Par définition
- $I = \iint \vec{j}_e \cdot d\vec{S}$
-
- $$I = j_e S$$

De plus $\vec{E} = -\text{grad } V$

$$\text{Soit } \int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^L -dV$$

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^L j_e dz = -V(L) + V(0)$$

$$U = V(0) - V(L) = \frac{1}{\gamma} j_e L$$

3. D'après la loi d'Ohm
- $U = R_L I$

$$\text{or } U = \frac{L}{\gamma} \cdot \frac{I}{S} \quad R_L = \frac{L}{\gamma S}$$

Caractéristique de la bobine

- 4(a) Sur une seule couche de bobinage on a
-
- $$N = \frac{L}{d} \text{ spires sur la longueur } L$$

$$n = \frac{1}{d} \text{ nombre de spires par unité de longueur sur 1 couche de bobinage.}$$

- b. Il y a p couches de bobinage d'où

$$n' = \frac{p}{d} = \text{nombre de spires par unité de longueur du solénoïde}$$

- 5(a) Pour un solénoïde infini

$$\vec{B} = \mu_0 n' I \vec{e}_3 \text{ à l'intérieur du solénoïde}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{p}{d} I \vec{e}_3$$

$$b. \text{ AN. } p = \frac{dB}{\mu_0 I} \quad p = \frac{36 \cdot 10^{-3} \times 2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 35}$$

$$p = 136$$

$$6. a. L_{\text{fil}} = N' \times 2\pi R_{\text{moy}}$$

$$N' = \frac{L}{d} \times p \quad \text{nombre de spire} \quad L_{\text{fil}} = \frac{2\pi L p R_{\text{moy}}}{d}$$

$$b. L_{\text{fil}} = 257 \text{ km}$$

$$7. a. R_{\text{elec}} = \frac{4 L_{\text{fil}}}{\gamma_{\text{Cu}} d^2 \pi}$$

$$b. \text{ AN } P_J = R_{\text{elec}} I^2 \quad P_J = 742 \text{ kW}$$

40. Caractéristique de la bobine

8) a. Pour $I' = 80 \text{ A}$ $p' = 60$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } P'_J &= R'_{\text{elec}} I'^2 \\
 &= \frac{4 L'_{\text{fil}}}{\gamma'_{\text{Cu}} d^2 \pi} I'^2 \quad \begin{array}{l} L'_{\text{fil}} = 90 \text{ km} \\ R'_{\text{elec}} = 35 \Omega \end{array} \\
 &= \frac{4}{\gamma'_{\text{Cu}} d^2 \pi} I'^2 \cdot \frac{2 \pi L p' R'_{\text{moy}}}{d}
 \end{aligned}$$

$$P'_J = \frac{8 I'^2 p' R'_{\text{moy}} L}{\gamma'_{\text{Cu}} d^3}$$

$$P'_J = 248 \text{ kW.}$$

9) a. Bilan énergétique $\begin{cases} \Delta U = 0 \text{ (let d'état + cycle)} \\ \Phi_f + \Phi_c + W = 0 \end{cases}$

Bilan entropique $\begin{cases} \Delta S = 0 \text{ (let d'état + cycle)} \\ \frac{\Phi_f}{T_f} + \frac{\Phi_c}{T_c} = 0 \end{cases}$

car réversible.

Par définition $e_{\text{rev}} = \frac{\Phi_f}{W} = \frac{\Phi_f}{-\Phi_f - \Phi_c}$

$$e_{\text{rev}} = \frac{1}{-1 - \frac{\Phi_c}{\Phi_f}}$$

or $\Phi_c = -\frac{T_c}{T_f} \Phi_f$ soit $-\frac{\Phi_c}{\Phi_f} = +\frac{T_c}{T_f}$

$$e_{\text{rev}} = \frac{1}{-1 + \frac{T_c}{T_f}}$$

$$e_{\text{rev}} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

b. AN. $e_{\text{rev}} = 0,35.$

10. P' = puissance mécanique reçue par le fluide co-pompé.

On considère que pour absorber P'_J dissipée dans la bobine il faut $\Phi_f = P'_J$

D'où $P' = \frac{P'_J}{e_{\text{rev}}}$

$$P' = 709 \text{ kW}$$

Ce n'est pas vraiment plus petit que les 743 kW à température ambiante.

II. Puissance dissipée dans le supraconducteur lors des régimes transitoires

11. On a $I_c = \pi R^2 j_0$ I_c est obtenu lorsque tout le conducteur est parcouru par j_0 -
Etude de la première montée du courant.

12. On a $u = \frac{I_0}{I_c}$

avec $I_c = \pi R^2 j_0$ $u = \frac{I_0}{\pi R^2 j_0}$

13. a) On a $I(t) = j_0 \pi (R^2 - r_1^2(t))$

b) Soit $\frac{I_0 t}{T} = j_0 \pi (R^2 - r_1^2(t))$
 $-\frac{I_0 t}{T j_0 \pi} + R^2 = r_1^2(t)$

$$r_1(t) = R \left(1 - u \frac{t}{T} \right)^{1/2}$$

c) $r_1(T) = R \sqrt{1 - u}$

16. $\vec{E}$ s'exprime en $V.m^{-1}$.

17. Par définition $p_G(r, t) = \vec{j} \cdot \vec{E}$

$$p_G(r, t) = j_e(r, t) \cdot E(r, t)$$

a) Pour $r \in [0, r_1(t)]$ $p_G = 0$.

b) Pour $r \in [r_1, R]$ $p_G = j_0^2 r_1 \frac{dr_1}{dt} \ln \frac{R}{r_1} \mu_0$
 $p_G = \mu_0 j_0^2 \frac{I_0}{2\pi T} \ln \frac{R}{r_1(t)}$

18. $P_{elec} = \int_0^R p_G(r, t) 2\pi r dr L_{supra}$
 $= 2\pi L_{supra} \int_{r_1}^R \mu_0 j_0^2 r_1 \frac{dr_1}{dt} \ln \frac{R}{r_1} r dr$
 $= 2\pi L_{supra} \mu_0 j_0^2 r_1 \frac{dr_1}{dt} \left[\frac{R^2}{2} \ln \frac{R}{r_1} - \frac{R^2}{4} - \frac{r_1}{2} \ln 1 + \frac{r_1^2}{4} \right]$

$$P_{elec}(t) = 2\pi L_{supra} \mu_0 j_0 \frac{I_0}{2\pi T} \left[\frac{R^2}{2} \ln \frac{R}{r_1} - \frac{R^2}{4} + \frac{r_1^2}{4} \right]$$

avec $r_1^2(t) = R^2 - \frac{I_0 t}{j_0 \pi T}$

$$P_{elec}(t) = \mu_0 L_{supra} j_0 \frac{I_0}{T} \left[\frac{R^2}{2} \ln \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{I_0 t}{j_0 \pi T}}} - \frac{R^2}{4} + \frac{R^2 - \frac{I_0 t}{j_0 \pi T}}{4} \right]$$

or $u = \frac{I_0}{\pi R^2 j_0}$

$$P_{elec}(t) = \mu_0 L_{supra} \frac{I_0^2}{T} \left(-\frac{1}{2} \ln(1 - u \frac{t}{T}) - \frac{u t}{4} \right)$$

$$P_{\text{elec}}(t) = - \frac{\mu_0 I_0^2 L_{\text{spira}}}{4\pi T u} \left(\ln\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) + \frac{e^{-t/T}}{T} \right)$$

19) a) $Q = \int_0^T P_{\text{elec}}(t) dt$

$$= - \frac{\mu_0 I_0^2 L_{\text{spira}}}{4\pi T u} \int_0^T \left(\ln\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) + \frac{e^{-t/T}}{T} \right) dt$$

$$Q = - \frac{\mu_0 I_0^2 L_{\text{spira}}}{4\pi T u} \left[\frac{1 - e^{-t/T}}{e^{-t/T}} - \left(1 - \frac{t}{T}\right) \ln\left(1 - \frac{t}{T}\right) \right]_0^T$$

$$= - \frac{\mu_0 I_0^2 L_{\text{spira}}}{4\pi e T} \left(-T - \frac{T}{u} (1-u) \ln(1-u) + \frac{T}{u} \ln 1 + \frac{uT}{2} \right)$$

$$Q = \frac{\mu_0 I_0^2 L_{\text{spira}}}{4\pi u} \left(+1 + \left(\frac{1}{u} - 1\right) \ln(1-u) - \frac{u}{2} \right)$$

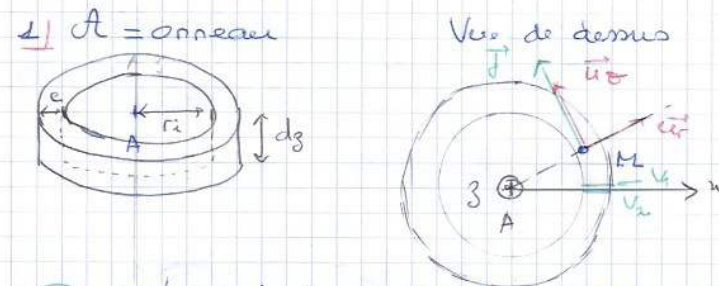
b) Q ne dépend pas de T et est donc sensible d'augmenter cette valeur.

20) $Q_{\text{amb}} = \frac{Q}{e}$

AN $Q_{\text{amb}} = 35 \text{ kJ}!$

Quatrième partie

Freinage d'une chute libre par induction



a) D'après la loi d'Ohm locale $\vec{j}(r) = \gamma \vec{E}(r)$

D'où $\vec{E}(r) = \frac{j}{\gamma} \vec{u}_\theta$

b) On a $\vec{E} = -\text{grad} V$
avec $U = V_1 - V_2 = \int_0^{2\pi} dV = + \int_0^{2\pi} \vec{E}(r) \cdot d\vec{\theta}$

Soit $U = \frac{j}{\gamma} 2\pi r_i = \frac{j}{\gamma} 2\pi r_i$

c) Par définition de I $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$

D'où $I = \int j \vec{u}_\theta \cdot dS \vec{u}_\theta$ $I = \int j dz$

d) D'après la loi d'Ohm $U = dR I$
 $\Rightarrow \frac{j 2\pi r_i}{\gamma} = dR \cdot j dz$

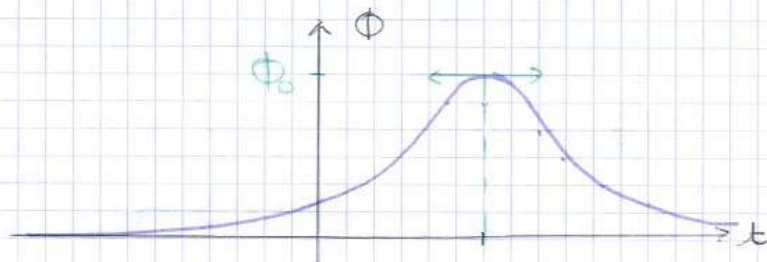
$$dR = \frac{2\pi r_i}{\gamma dz}$$

$$dG = \frac{1}{dR} = \frac{\gamma dz}{2\pi r_i}$$

2) On a $\Phi(t) = \Phi_0 \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{3+vt}{r_i}\right)^2\right)^{3/2}}$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_0 \frac{3}{2} \frac{2 \frac{v}{r_i} \left(\frac{3+vt}{r_i}\right)}{\left(1 + \left(\frac{3+vt}{r_i}\right)^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad x = -\frac{3}{v}$$



On doit avoir $[\Phi_0] = [\mu_0]^a [n_0]^b [n]^c$

avec $[\Phi_0] = [\text{champ } B] \cdot L^2$

$$[n_0] = I L^2$$

$$[n] = L$$

or $B = \mu_0 n I$ pour un solénoïde

$$[\mu_0] = \frac{[\text{champ } B]}{I \cdot L^{-1}}$$

De plus $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

$$[\text{champ } \vec{B}] = \frac{N L T^{-2}}{I T \cdot L T^{-1}} = M I^{-1} T^{-2}$$

Il vient $M I^{-1} T^{-2} = \frac{M^a I^{-2a} T^{-2a} L^{-a}}{I^b L^{2b} L^c}$

$$1 = a$$

$$-1 = -2a + b$$

$$b = 1$$

$$-2 = -2a \quad \text{ok}$$

$$0 = -a + 2b + c \quad c = -1$$

D'où $\Phi_0 = \frac{\mu_0 M_0}{r_i}$

3) On pose $x = \frac{3+vt}{r_i}$

dP_J = puissance dissipée par effet Joule dans l'anneau

$$= dR i^2 = dG U^2$$

avec $U = e_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$

or $d\Phi/dt = 3 \Phi_0 \frac{v}{r_i} \frac{x}{(1+x^2)^{5/2}}$

or $dG = \frac{\gamma_e d\lambda}{2\pi r_i}$ avec $dn = \frac{d\lambda}{r_i}$

Il vient

$$dP_J = \frac{\gamma_e}{2\pi r_i} r_i dn \int \Phi_0^2 \frac{v^2 x^2}{r_i^2 (1+x^2)^5}$$

On a bien $dP_J = \frac{g \gamma_e \mu_0^2 n_0^2}{2\pi r_i^4} \frac{\lambda^2 dn}{(1+\lambda^2)^5} v^2$

4) La puissance totale dissipée lors de la chute est la somme des puissances dissipées sur l'espace et le temps

5] On a $P_J = k N_0^2 v^2$

Si il y a conservation totale on a

$$P_J + P_L = 0$$

avec $P_L = \vec{F} \cdot \vec{v}$ et $\vec{v} = -v \vec{e}_3$

D'où $\vec{F} \cdot \vec{v} = -k N_0^2 v^2$

Selon $\vec{e}_3$ $-Fv = -k N_0^2 v^2$

$$\vec{F} = k N_0^2 v \vec{e}_3 = -k N_0^2 \vec{v}$$

6] Pour la cuivre $\Delta t_{th} = 4,0 \text{ A}$

Notamment réglage uniforme $\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$

D'où $k N_0^2 \frac{l}{\Delta t_{th}} = mg$

$$\Delta t_{th} = \frac{k N_0^2 l}{mg} \quad \text{or } P_J \propto k$$

$$\text{or } P_J \propto \gamma$$

Donc $\Delta t_{th} \propto \gamma$

$$\Delta t_{thAl} = \Delta t_{thCu} \cdot \frac{\gamma_{Al}}{\gamma_{Cu}} \quad \Delta t_{thAl} = 2,70$$

$$\Delta t_{thAl} = 0,50$$

7] On a $N_0 = \sqrt{\frac{mg \Delta t_{th}}{kl}}$

AN $N_0 = 1,6 \text{ Am}^2$