Champ magnétostatique

Questions de cours

- Les lignes de champ magnétique sont-elles ouvertes ou fermées ?
- Rappeler l'équation locale de Maxwell-flux .
- Que peut-on dire du flux de champ $\overrightarrow{B}$?
- Énoncer le théorème d'Ampère, l'établir.
- Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air.

Applications directes du cours

$\boxed{1}$ Déterminer le champ magnétique créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité I.

Exercices

1. Plan parcouru par un courant

Entre les deux plans $z = -a$ et $z = +a$ existe un courant de densité volumique uniforme $\overrightarrow{j} = j_0\overrightarrow{u_x}$. Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace et le représenter graphiquement.

2. Cylindre parcouru par un courant inhomogène

On considère un câble cylindrique de rayon R et d'axe z parcouru par un courant d'intensité I réparti de façon non uniforme au sein du câble,

$$\overrightarrow{j}(r) = J_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\overrightarrow{e_z}$$

1. Exprimer J_0 en fonction de I.
2. Calculer le champ magnétostatique créé par ce câble en tout point de l'espace.
3. Vérifier que le champ trouvé obéit bien à l'équation de Maxwell-Ampère.

Données : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rB_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$

3. Définition légale de l'Ampère

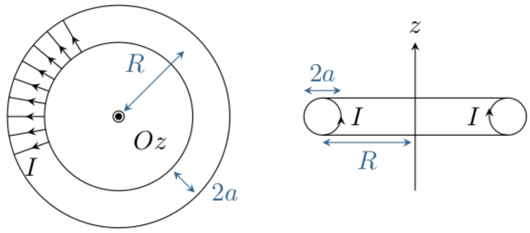
L'ampère est l'intensité i du courant électrique tel que, pour deux fils rectilignes infinis, disposés parallèlement à une distance $D = 1$ m, parcourus par cette intensité i, la force par unité de longueur est $\frac{F}{\ell} = 2.10^{-7}$ N.m^{-1}.

En déduire la valeur de la perméabilité μ_0 du vide.

4. Bobine torique

Une bobine torique est un enroulement de fil conducteur sur un support en forme de tore, c'est-à-dire la forme d'une bouée. Le support torique est caractérisé par un rayon moyen R autour de son axe de symétrie (Oz) et une section circulaire de rayon $a < R$.

L'enroulement comporte $N \gg 1$ spires que l'on modélisera par des spires planes circulaires de rayon a. Le nombre de spires est suffisamment grand pour que l'on puisse considérer les spires comme continûment réparties le long du tore. On note I le courant circulant dans cette bobine. On se place en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).



Montrer que le champ magnétostatique créé par cette bobine s'écrit $\overrightarrow{B} = B(r,z)\overrightarrow{e_\theta}$, et le calculer en tout point M, en distingant les cas selon que M se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la bobine.

5. Fil conducteur creux

Un fil conducteur épais de rayon R et d'axe (Oz) est parcouru par un courant de densité $j\overrightarrow{u_z}$ uniforme.

1. Déterminer le champ $\overrightarrow{B_0}$ en tout point M de l'espace.
2. Exprimer $\overrightarrow{B_0}$ en fonction de $\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{OM}$ pour $r < R$.
3. On suppose maintenant que le fil est creux et présente une cavité cylindrique parallèle à l'axe du cylindre mais décentrée par rapport à cet axe. Dans le reste du cylindre, la densité de courant est toujours égale à $\overrightarrow{j}$. Calculer le champ magnétique dans la cavité.

6. Distribution à géométrie cylindrique

On considère, en coordonnées cylindriques, le champ magnétique $\vec{B}$ défini par :

$$\overrightarrow{B} = B_0\left(\frac{r}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{r-a}{a}\right)\overrightarrow{e_\theta} \text{ pour } 0 \leq r \leq a$$

et

$$\overrightarrow{B} = B_0\frac{a}{r}\overrightarrow{e_\theta} \text{ pour } r > a.$$

Déterminer les courants qui sont à l'origine de ce champ. (Le milieu considéré sera supposé comme étant équivalent au vide : $\mu = \mu_0$).

Données : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rB_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$

7. Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de même axe Oz :
- l'âme $\mathscr{C}_1$ est un cylindre conducteur plein, de rayon a_1,
- l'armature externe, ou gaine, est un cylindre creux, de rayon a_2 et d'épaisseur négligeable.
- le volume entre les deux est constitué par un isolant, assimilé à du vide.

Ce câble est utilisé dans un circuit électrique : l'âme est parcourue par un courant I dirigé dans le sens des z croissants, réparti uniformément en volume. La gaine, elle, est parcourue par le courant $-I$ en retour.

1. Calculer le champ magnétostatique entre les armatures.
2. On souhaite calculer le champ à l'intérieur de l'âme.
   (a) Exprimer la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ l'intérieur de l'âme en fonction de I et a_1.
   (b) En déduire, par application du théorème d'Ampère, le champ en tout point de l'âme.

3. Représenter la norme de $\overrightarrow{B}$ en fonction de r.
4. Soit une surface rectangulaire de hauteur h (selon Oz) et de largeur $a_2 - a_1$ (selon Or), surface située entre les 2 armatures et orthogonale à celles-ci (surface de vecteur normal $\overrightarrow{u_\theta}$). Calculer le flux Φ du champ magnétique à travers cette surface. En déduire le coefficient d'autoinduction par unité de longueur Γ.

8. Bobines de Helmoltz

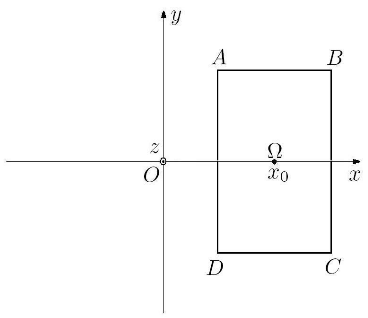
Une bobine plate circulaire d'axe (Oz), composée de N spires parcourues par un courant d'intensité I crée sur son axe un champ magnétique dont m'expression est la suivante :

$$\overrightarrow{B}(z) = \mu_0 N I \frac{R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}} \overrightarrow{e_z}$$

1. Champ au voisinage de l'axe.
En dehors de l'axe, le champ magnétique possède une composante radiale B_r et une composante axiale (le long de Oz) B_z qui ne dépendent que des cordonnées r et z de M.
On s'intéresse au calcul approché de B_r pour des points très voisins de l'axe Oz, c'est-à-dire lorsque r est proche de zéro.
On pose : $B(z) = B_z(r=0, z)$. En écrivant la conservation du flux de $\overrightarrow{B}$ à travers un cylindre d'axe Oz, de rayon r très petit et dont les bases inférieure et supérieure sont situées aux cotes z et $z + \mathrm{d}\,z$, montrer que, lorsque $\mathrm{d}\,z \to 0$:
$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}\,B}{\mathrm{d}\,z}(z)$$
2. On considère deux bobines coaxiales identiques. Les bobines sont dites en configuration de Helmoltz lorsqu'elles sont séparées d'une distance R et parcourue par un même courant.
Montrer que le champ entre les deux bobines s'écrit alors :
$$\overrightarrow{B_0} = \frac{8\mu_0 N I}{\sqrt{125}R}\overrightarrow{e_z}$$

9. Inductance mutuelle entre un fil et un cadre rectangulaire

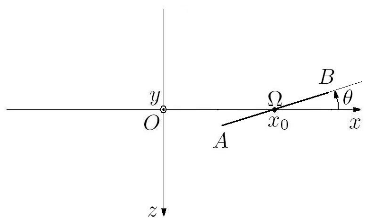
On considère un cadre $ABCD$, de centre Ω d'abscisse x_0, de côtés $AB = a$, $BC = d$ et un fil infini $y'y$ dans le plan du cadre.



1. Déterminer le coefficient d'inductance mutuelle du cadre et du fil.

2. Le fil étant parcouru par un courant d'intensité i constante, le cadre est en translation à la vitesse $v_0\overrightarrow{e_x}$. Déterminer la force électromotrice induite dans le cadre.

3. On fait pivoter $ABCD$ d'un angle θ autour de l'axe Ωy.



Déterminer le nouveau coefficient d'inductance mutuelle.