



## Devoir surveillé n°2

Samedi 11 octobre 2025

N.B. : vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

### RAPPEL DES CONSIGNES :

Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.

Ne pas utiliser de correcteur.

Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

## Première partie

# Le gecko

Source : Autumn K., L'inusable adhésif des pattes du gecko, Pour la Science, n° 343, 2006, p. 82-88.

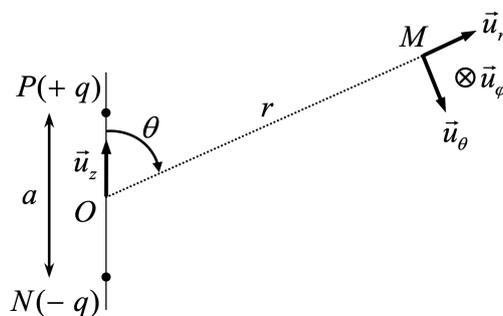
Le gecko est un petit lézard capable de se déplacer à des vitesses de plusieurs mètres par seconde sur les murs ou les plafonds de pratiquement toutes natures, dans presque toutes les conditions. Des expériences menées en 2002 par l'équipe de l'américain Kellar Autumn ont montré que la spectaculaire faculté d'adhésion de l'animal est uniquement due à des forces de Van der Waals. L'adhésion est possible grâce à l'anatomie particulière des coussinets des doigts du lézard. Ces derniers sont recouverts de poils microscopiques, les sétules, ramifiés en des centaines de branches terminées par une spatule pouvant s'approcher à quelques nanomètres de la surface de contact.

### Données

- Opérateur gradient d'un champ scalaire  $U$  :
  - $\vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$  en coordonnées cartésiennes
  - $\vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$  en coordonnées cylindriques
  - $\vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$  en coordonnées sphériques
- Permittivité du vide :  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
- Constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
- Intensité de la pesanteur :  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$
- Définition du debye (D) :  $1 \text{ D} = 3,33 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$

## I Interactions entre molécules polaires

On considère une molécule polaire située dans le vide, modélisée par un dipôle électrique rigide de moment dipolaire électrique permanent  $\vec{p}_1 = p_1 \vec{u}_z$ . Le dipôle, centré en un point  $O$ , est constitué de deux charges ponctuelles opposées,  $+q$  et  $-q$  (avec  $q > 0$ ), situées sur l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  aux points respectifs  $P$  et  $N$  distants de  $a = PN$  (figure 1). On repère tout point  $M$  de l'espace par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  dans le repère  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ .



**Figure 1** - Dipôle électrique centré en un point  $O$

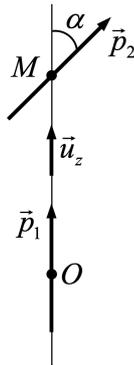
1. Expliquer, en prenant l'exemple de la molécule de chlorure d'hydrogène (HCl), l'origine du moment dipolaire permanent de certaines molécules. Donner l'expression en fonction de  $a$  et  $q$  du moment dipolaire

électrique  $\vec{p}_1$  de la molécule polaire.

- Établir l'expression du potentiel électrostatique  $V_1(M)$  créé en  $M$  par la molécule polaire dans le cadre de l'approximation dipolaire qu'on explicitera. On donnera le résultat en fonction de  $p_1$ ,  $\epsilon_0$  et des coordonnées sphériques du point  $M$ .
- En déduire l'expression du champ électrostatique  $\vec{E}_1(M)$  créé en  $M$  par la molécule polaire.

Une seconde molécule polaire, modélisée par un dipôle rigide de moment dipolaire électrique permanent  $\vec{p}_2$ , est située au point  $M$  sur l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  tel que  $\theta = 0$ , à la distance  $r$  fixe du point  $O$ .

À un instant donné, son moment dipolaire forme un angle  $\alpha$  avec cet axe (figure 2). Dans ces conditions, la molécule plongée dans le champ électrostatique dû à l'autre molécule située au point  $O$  subit un couple de forces de moment :  $\vec{\Gamma} = \vec{p}_2 \wedge \vec{E}_1(M)$ . On rappelle l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules :  $\mathcal{E}_{12} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(M)$ .



**Figure 2 - Interaction entre deux molécules polaires**

- Quel est l'effet du couple de forces subi par la molécule fixée au point  $M$ ? Justifier l'orientation de son moment dipolaire électrique lorsqu'elle est en équilibre stable.

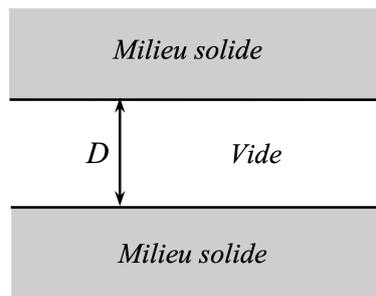
Les deux molécules sont supposées identiques, de moments dipolaires électriques de même valeur  $p_1 = p_2 = p = 1 \text{ D}$ .

- Estimer l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules, distantes de  $r = 0,5 \text{ nm}$ , en supposant leurs moments dipolaires électriques alignés. Comparer cette énergie à l'énergie d'agitation thermique qui est de l'ordre de  $k_B T$  où  $k_B$  est la constante de Boltzmann, à la température ambiante  $T = 293 \text{ K}$ . Conclure.
- Du fait de l'agitation thermique, on doit considérer l'énergie potentielle d'interaction moyenne entre deux dipôles situés à une distance  $r$  dont les orientations relatives sont sujettes à des variations aléatoires. À température suffisamment élevée, on montre que cette énergie potentielle d'interaction moyenne est de la forme :  $\langle \mathcal{E}_{12} \rangle = -\frac{C_K}{r^6}$  où  $C_K = \frac{1}{k_B T} \left( \frac{p^2}{2\pi\epsilon_0} \right)^2$ . Donner un ordre de grandeur de  $C_K$  à la température ambiante  $T = 293 \text{ K}$ . Vérifier que la force  $\vec{F}_{1/2}$  qui dérive de cette énergie potentielle est attractive. On rappelle que  $\vec{F}_{1/2} = -\overrightarrow{\text{grad}} \langle \mathcal{E}_{12} \rangle$ .

## II Calcul de la force d'adhérence du gecko au plafond

La force, calculée à la question précédente, correspond à une interaction de Van der Waals entre molécules polaires. Si on considère maintenant deux plans infinis parallèles, distants de  $D$  et séparant chacun un milieu solide (figure 3), on montre en prenant en compte l'ensemble des interactions de Van der Waals que la force surfacique entre les deux milieux s'écrit :  $f(D) = \frac{A}{6\pi D^3}$ . La constante  $A$ , appelée constante de Hamaker,

dépend de la nature des interactions de Van der Waals et des densités moléculaires des deux solides en interaction.



**Figure 3 - Deux milieux plans infinis en interaction**

7. Vérifier que la constante de Hamaker  $A$  est homogène à une énergie.
8. Un gecko de masse  $m = 50$  g est suspendu par ses quatre pattes au plafond. Le gecko possède au total 6 millions de sétules, comportant chacune en moyenne 500 spatules. En modélisant une spatule par une surface carrée de  $0,2 \mu\text{m}$  de côté située à une distance  $D = 1$  nm du plafond, estimer le pourcentage de sétules utilisées par le gecko pour soutenir sa masse. On prendra  $A = 10^{-19}$  J et on négligera tout effet de bord.

Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a constaté qu'un gecko de 50 g utilise à son maximum d'adhérence uniquement 0,04% de ses sétules pour soutenir sa masse, peut-on bien imputer les facultés d'adhérence du gecko aux interactions de Van der Waals ? Pourquoi le gecko mobilise-t-il certainement davantage de sétules pour assurer son adhérence ?

9. À un instant pris pour origine, on suppose que le gecko lâche le plafond et chute de 10 cm avant de se rattraper à l'aide d'une patte à une surface verticale. Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a pu mesurer une force de cisaillement (opposée au glissement) de l'ordre de 10 N par patte, estimer la distance que doit parcourir le gecko lorsque sa patte est en contact avec le mur pour s'arrêter. On supposera qu'il mobilise 50% de la capacité de cisaillement maximale de sa patte.

*Cette question fait appel à une démarche de résolution de problème. Il est notamment attendu de préciser chaque notation introduite, de présenter de façon claire les hypothèses retenues, de mener de bout en bout un calcul littéral, puis d'effectuer l'application numérique attendue.*

## Deuxième partie

# Plasma et fusion

### Données numériques

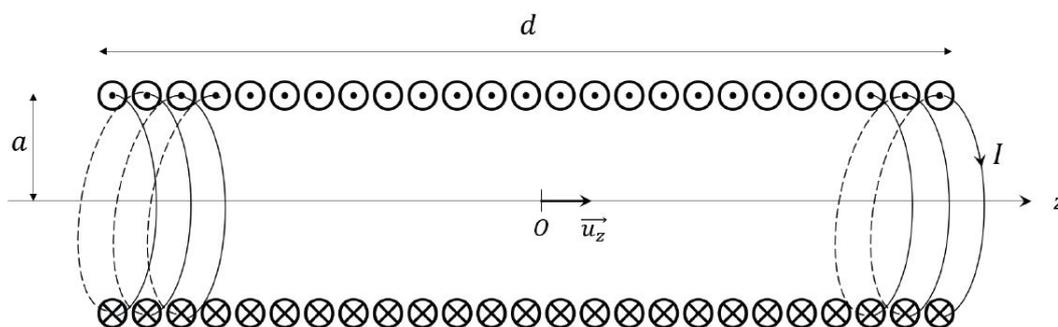
- Permittivité diélectrique du vide :  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
- Charge élémentaire :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Masse de l'électron :  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- Constante de BOLTZMANN :  $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$

## I Confinement magnétique du plasma

Les plasmas créés pour réaliser la fusion thermonucléaire ayant des températures extrêmement élevées, ceux-ci ne peuvent être au contact direct de la paroi du réacteur qui fondrait ou serait fortement endommagée. Pour contenir ces plasmas, on doit donc réaliser un confinement immatériel : la méthode la plus étudiée à ce jour est le confinement magnétique. On se propose dans cette partie d'en comprendre le principe par l'étude du mouvement d'une unique particule chargée au sein du plasma : un cation de masse  $m$  et de charge électrique  $+e$  (le cas d'un électron se traitant de manière similaire). On supposera que seule la force magnétique agit sur le cation et qu'aucune collision n'a lieu avec les autres espèces présentes dans le plasma.

### A. Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

Le champ magnétique nécessaire au confinement du plasma est créé par un solénoïde d'axe ( $Oz$ ) orienté par le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$ , constitué de  $N$  spires de rayon  $a$ , régulièrement réparties sur une longueur  $d \gg a$ . Toutes les spires sont parcourues par un courant d'intensité  $I$  constante (**figure 1**).



**Figure 1** - Schéma du solénoïde. Seules quelques spires sont représentées par souci de lisibilité

1. Montrer que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est de la forme  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ , avec  $B_0$  une constante qu'on exprimera, entre autres, en fonction de l'intensité  $I$ . On admettra que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde et on négligera les effets de bord.

On s'intéresse maintenant au mouvement d'un cation de masse  $m$  et de charge électrique  $+e$  à l'intérieur de ce solénoïde, soumis au champ  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ .

2. Montrer que la puissance de la force magnétique est nulle. En déduire que l'énergie cinétique du cation se conserve. Par la suite, on notera  $v_0$  la norme constante de la vitesse du cation au cours de son mouvement.

On suppose d'abord que le cation a un mouvement dans un plan perpendiculaire au champ magnétique  $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$ .

3. Représenter sur un schéma le vecteur vitesse  $\vec{v}$  du cation, le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  perpendiculaire au plan de la feuille et la force magnétique  $\vec{F}_m$ . Esquisser la courbure de la trajectoire puis représenter les vecteurs unitaires du repère de FRENET.
4. Donner l'expression de l'accélération du cation dans le repère de FRENET en fonction de sa vitesse  $v_0$  et du rayon de courbure  $r$  de la trajectoire. Montrer que la trajectoire du cation est circulaire, de rayon  $r_L = \frac{v_0}{\omega_c}$  appelé rayon de LARMOR, avec  $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$  la pulsation cyclotron.

On suppose maintenant que le cation possède une vitesse initiale  $v_0$  parallèle au champ magnétique  $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$ .

5. En projetant le principe fondamental de la dynamique selon  $\vec{u}_z$ , montrer que la composante  $v_z$  de la vitesse du cation selon  $\vec{u}_z$  est constante. En déduire que le mouvement est rectiligne. Peut-on affirmer que le cation est confiné ?

Pour une vitesse initiale quelconque du cation, le mouvement est une combinaison du mouvement circulaire perpendiculaire au champ magnétique et du mouvement rectiligne parallèle au champ magnétique : la trajectoire est alors hélicoïdale.

6. Actuellement, la majorité des recherches sur le confinement magnétique portent sur les tokamaks, pour lesquels les bobines produisant le champ magnétique ne forment pas un cylindre (comme pour le solénoïde) mais un tore (**figure 2**), qui est un cylindre refermé sur lui-même. Le confinement magnétique du plasma est donc assuré par les bobines toroïdales (le rôle du solénoïde central sera étudié dans la **sous-partie II**). Quelle raison a conduit à retenir une géométrie toroïdale ?

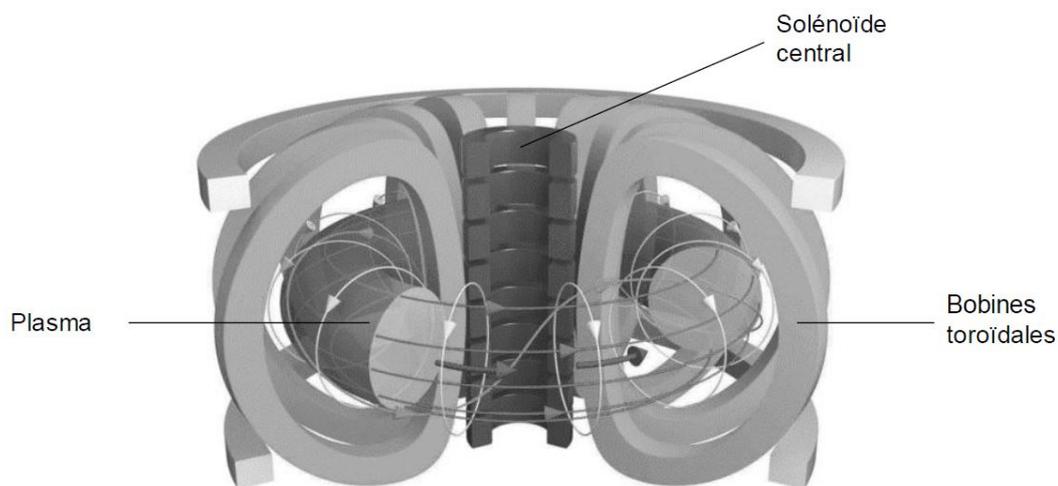


Figure 2 - Schéma d'un tokamak

7. Calculer le rayon de LARMOR d'un cation d'hélium  ${}^4_2\text{He}^{2+}$  (masse  $m = 6,6 \cdot 10^{-27}$  kg) de vitesse  $v_0 = 3 \cdot 10^5$  m·s<sup>-1</sup> dans le tokamak d'ITER produisant un champ magnétique  $B_0 = 12$  T. Commenter, sachant que les rayons internes des bobines toroïdales sont de 2 m à l'horizontale et de 3,4 m à la verticale.

## B. Bouteille magnétique

Lors des premières recherches sur la fusion contrôlée, il a été envisagé de confiner le plasma à l'aide d'une "bouteille magnétique", qui est un solénoïde dont le rayon des spires diminue lorsqu'on se rapproche de ses bords. L'allure des lignes de champ dans une bouteille magnétique est représentée sur la **figure 3**.

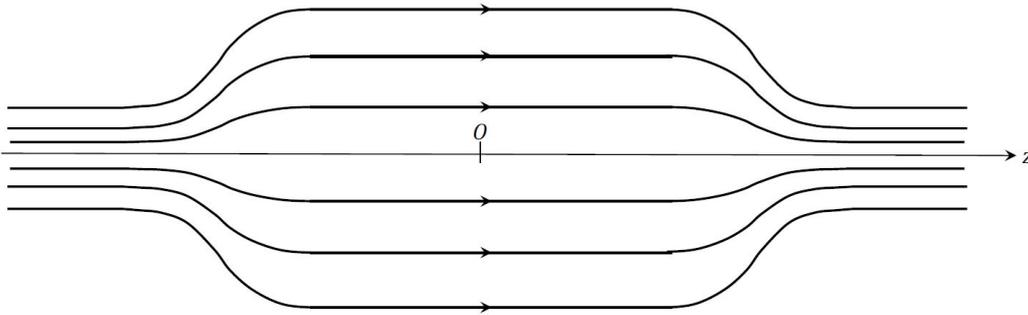


Figure 3 - Lignes de champ d'une bouteille magnétique

8. Comment évolue qualitativement l'intensité du champ magnétique lorsqu'on se rapproche des bords de la bouteille magnétique (c'est-à-dire lorsque  $|z|$  augmente)? Représenter graphiquement l'allure de la norme du champ magnétique  $B(z)$  sur l'axe  $(Oz)$ .

On s'intéresse au mouvement d'un cation de masse  $m$  dans cette bouteille magnétique autour de l'axe  $(Oz)$ . Son vecteur vitesse est  $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ , où  $\vec{v}_\perp$  désigne la vitesse dans le plan perpendiculaire à  $\vec{u}_z$ , et  $\vec{v}_\parallel$  la vitesse selon  $\vec{u}_z$ .

9. Rappeler, schéma à l'appui, la définition du moment magnétique  $\vec{\mu}$  d'une boucle de courant plane.
10. Au voisinage de l'axe  $(Oz)$ , le champ magnétique est localement uniforme et orienté selon  $\vec{u}_z$  :  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ . Dans cette question, on suppose comme dans la question 4. que le mouvement du cation est circulaire, uniforme et de vitesse  $v_\perp$ , perpendiculairement au champ magnétique. Montrer que le moment magnétique  $\vec{\mu}$  associé au cation a pour expression :

$$\vec{\mu} = -\frac{mv_\perp^2}{2B}\vec{u}_z$$

L'expression du moment magnétique établie à la question précédente reste en première approximation valable malgré les déplacements du cation selon l'axe  $(Oz)$ . En outre, on peut montrer que ce moment magnétique reste constant au cours du mouvement. Ainsi, le cation peut être assimilé à un dipôle magnétique rigide se déplaçant selon l'axe  $(Oz)$ , auquel on associe une énergie potentielle de la forme  $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ .

11. Montrer que  $E = \frac{1}{2}mv_\parallel^2 + E_p$  est une constante. Quelle signification physique peut-on donner aux termes  $\frac{1}{2}mv_\parallel^2$  et  $E$  du point de vue du dipôle magnétique?
12. Tracer l'allure de  $E_p(z)$ . Discuter qualitativement les différents mouvements possibles du cation dans la bouteille magnétique en fonction de la valeur de  $E$  (états libres ou états liés). Dans quel cas peut-on dire que la bouteille magnétique se comporte comme un "miroir magnétique", c'est-à-dire que le cation repart dans la direction opposée sur les bords de la bouteille?

## II Échauffement du plasma : chauffage ohmique par induction

Pour rendre possible la fusion, il faut vaincre la barrière coulombienne qui s'oppose au rapprochement des deux noyaux d'hydrogène. C'est la raison pour laquelle il est préalablement nécessaire d'échauffer le plasma jusqu'à ce que les réactions de fusion s'initient. L'objectif est ensuite d'atteindre le seuil d'ignition, c'est-à-dire le moment où l'énergie libérée par les réactions de fusion suffit à maintenir la température nécessaire à la fusion.

Dans les tokamaks (**figure 2**) une partie de l'échauffement est réalisé par induction. Un solénoïde situé au centre du tokamak produit un champ magnétique  $\vec{B}_1$  dépendant du temps. Le plasma, de géométrie torique, entoure ce solénoïde central : il est alors parcouru par un intense courant induit qui, par effet JOULE, chauffe le plasma. On se propose de modéliser sommairement cette situation. On se place en coordonnées cylindriques

$(r, \theta, z)$  d'axe  $(Oz)$ . Le solénoïde central d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $a_1$ , est parcouru par un courant  $i_1(t)$  qui génère un champ magnétique  $\vec{B}_1$  tel que  $\vec{B}_1(r < a_1, t) = \beta i_1(t) \vec{e}_z$  (avec  $\beta$  constant) et  $\vec{B}_1(r > a_1, t) = \vec{0}$ . Le plasma est assimilé à une boucle de courant filiforme parcourue par  $i_2(t)$ , de même axe que le solénoïde central et de rayon  $a_2 > a_1$  (figure 7).

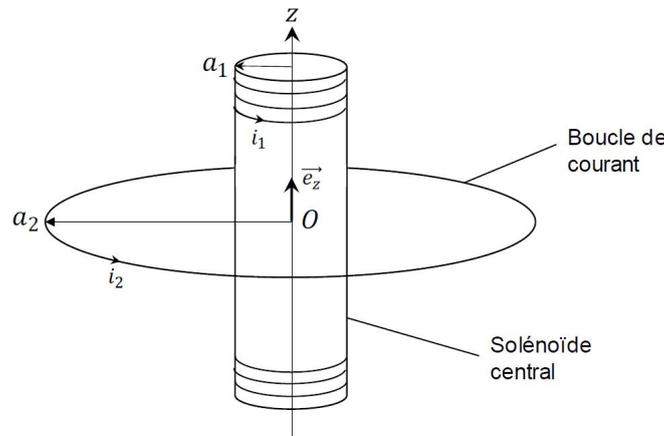


Figure 7 - Représentation schématique du système solénoïde central – plasma dans le tokamak

13. Exprimer l'inductance mutuelle  $M$  entre le solénoïde central et la boucle de courant, en fonction de  $\beta$  et de  $a_1$ . Calculer  $M$  pour le tokamak ITER, sachant que  $a_1 = 2$  m et que le champ magnétique au centre du solénoïde est de 13 T pour un courant maximal de 46 kA.

On modélise l'interaction entre le solénoïde et le plasma par le circuit électrique représenté figure 8. Le solénoïde central, d'inductance propre  $L_1$  et de résistance  $R_1$ , est parcouru entre  $t = 0$  et  $t = t_1$  par le courant  $i_1(t) = I_0 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)$  avec  $I_0$  et  $t_1$  des constantes. La boucle de courant représentant le plasma a pour résistance  $R_2$  et pour inductance propre  $L_2$ ; elle est parcourue par le courant  $i_2(t)$ .

À  $t < 0$ , le courant  $i_2$  est nul.  $M$  est l'inductance mutuelle entre les deux circuits.

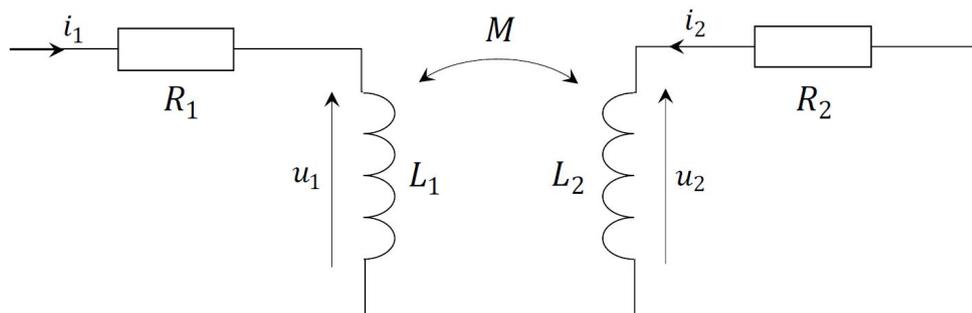


Figure 8 - Circuit équivalent au système solénoïde central – plasma

14. Montrer que  $i_2(t)$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau_2} = \frac{I_0}{\tau_1}$$

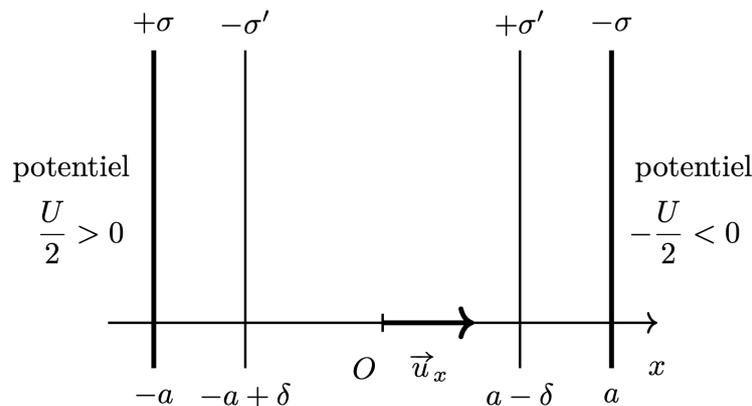
avec  $\tau_1$  et  $\tau_2$  qui seront exprimés en fonction de  $L_2$ ,  $R_2$ ,  $M$  et de  $t_1$ .

15. En déduire  $i_2(t)$ . En supposant  $t \ll \tau_2$ , simplifier cette expression par un développement limité au premier ordre en  $t/\tau_2$ .
16. Exprimer l'énergie reçue par  $R_2$  entre  $t = 0$  et  $t = t_1$  en fonction de  $R_2$ ,  $L_2$ ,  $M$ ,  $I_0$  et de  $t_1$ , en supposant que  $t_1 \ll \tau_2$ . Quel est l'effet de cette énergie sur le plasma ?

## Troisième partie

## Supercondensateurs

Les supercondensateurs sont conçus pour stocker et restituer rapidement de l'énergie électrique, en quantité bien supérieure aux condensateurs usuels et avec des temps de réponse et des puissances échangées bien meilleurs que ce que permettent les batteries électrochimiques classiques.



**Figure 3** – Schéma du condensateur à double couche.

À la différence d'un condensateur usuel, les deux électrodes d'un supercondensateur ne sont pas séparées par un isolant mais par une solution contenant des ions. Lorsque le condensateur est déchargé, les ions sont répartis aléatoirement dans la solution. Lorsqu'il est chargé, les ions négatifs sont attirés vers l'électrode portant une charge positive et réciproquement, ce qui conduit à une accumulation d'ions au voisinage de chaque électrode formant une double couche électrochimique.

Dans toute la suite, on considère le supercondensateur comme un système purement unidimensionnel d'axe  $(Ox)$ , de surface transverse  $S$  et d'épaisseur totale  $2a$  ( $\sqrt{S} \gg a$ ). Les propriétés électromagnétiques du solvant de l'électrolyte sont analogues à celles du vide, mais avec une permittivité diélectrique  $\epsilon_0\epsilon_r$  au lieu de  $\epsilon_0$ .

## I Étude d'un supercondensateur

Compte tenu de la très faible épaisseur de la double couche électrochimique, on la modélise simplement par une distribution surfacique de charge  $\sigma'$  distante des électrodes d'une distance  $\delta \ll a$  (voir figure 3). En pratique,  $\delta$  peut atteindre une dizaine de nanomètres alors que  $a$  peut difficilement être inférieure au micromètre. Ce modèle est appelé modèle de Helmholtz.

1. Déterminer le champ électrostatique  $\vec{E}_p$  créé par un plan infini de densité surfacique de charge  $\sigma$ .
2. En déduire le champ électrostatique  $\vec{E}$  entre les deux électrodes du condensateur double couche ( $-a < x < a$ ).
3. En raisonnant sur le potentiel électrostatique, montrer que

$$U = \frac{2a}{\epsilon_0\epsilon_r}\sigma - \frac{2(a-\delta)}{\epsilon_0\epsilon_r}\sigma'.$$

4. Justifier qu'en régime indépendant du temps, on a  $\sigma' = \sigma$ . En déduire l'expression de la capacité  $C_0$  du supercondensateur en régime indépendant du temps. Comparer  $C_0$  à la capacité d'un condensateur de même géométrie dans lequel la solution ionique serait remplacée par de l'air, de permittivité diélectrique  $\epsilon_0$ .

## II Modèle électrocinétique du supercondensateur

Contrairement aux condensateurs usuels dont le temps de charge (ou de décharge) est essentiellement gouverné par la résistance du circuit extérieur, le temps de réponse des supercondensateurs, et donc la puissance maximale qu'ils peuvent délivrer, est dû au temps nécessaire pour former la double couche électrochimique par transport de charge au sein de l'électrolyte.

À l'instant initial  $t = 0$ , le supercondensateur est soumis à un échelon de tension  $U$  à ses bornes. Les doubles couches se forment progressivement, partant de  $\sigma'(t = 0) = 0$ . Les expressions des champs électriques sont celles calculées à la question 2. On note  $\gamma$  la conductivité électrique de la solution, sachant que les doubles couches ( $-a < x < -a + \delta$  et  $a - \delta < x < a$ ) ne permettent pas le déplacement d'ions et sont donc isolantes.

5. Réaliser un bilan de charge entre  $t$  et  $t + dt$  pour le plan chargé se trouvant en  $x = a - \delta$  et montrer que sa charge  $q'$  vérifie

$$\frac{dq'}{dt} = \gamma \frac{\sigma - \sigma'(t)}{\epsilon_0 \epsilon_r} S.$$

6. En déduire que

$$\frac{d\sigma'}{dt} + \frac{\gamma \delta}{a \epsilon_0 \epsilon_r} \sigma' = \frac{\gamma}{2a} U.$$

Identifier un temps caractéristique  $\tau$  d'évolution de  $\sigma'$ . On modélise le supercondensateur par l'association d'un condensateur de capacité  $C_0$  en série avec une résistance  $R_0$ . Déterminer  $R_0$  en fonction des paramètres du problème.

Pour déterminer expérimentalement les paramètres  $R_0$  et  $C_0$  du supercondensateur, on réalise le montage de la figure 4, dans lequel le supercondensateur est associé en série à une source idéale. On réalise un test de caractérisation dans lequel l'intensité  $I$  varie avec le temps comme indiqué sur la figure 5.

7. D'après les résultats du test de caractérisation présentés sur la figure 5, déterminer les valeurs numériques de  $R_0$  et  $C_0$ . On note  $V_N$  la tension nominale d'une cellule.

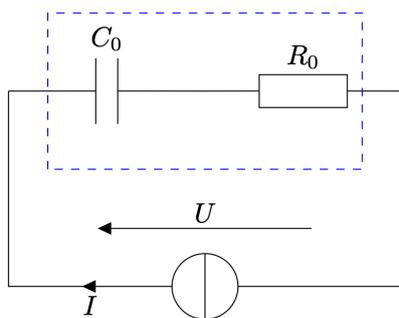


Figure 4 – Modèle du supercondensateur.

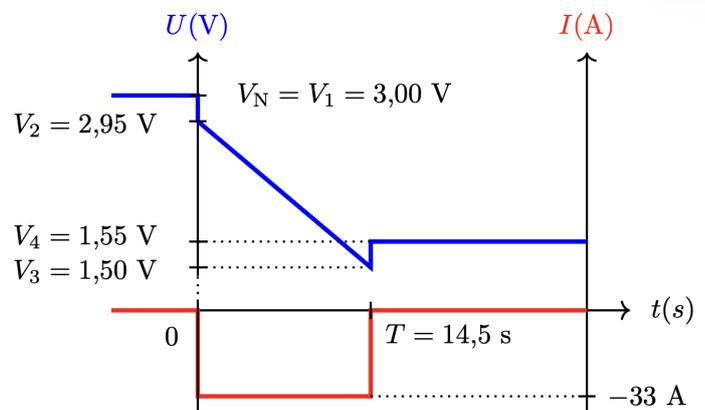


Figure 5 – Test de caractérisation en décharge. La courbe du haut représente les variations de la tension  $U$  et celle du bas les variations de l'intensité  $I$ .

## Quatrième partie

# Câble coaxial

### Données numériques :

$$\begin{aligned} \text{Permittivité du vide :} & \quad \epsilon_0 \simeq 8,854 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1} \\ \text{Vitesse des ondes EM dans le vide :} & \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

### Formulaire :

$f$  étant un champ scalaire et  $\vec{a}$  un champ vectoriel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{a}) = f\overrightarrow{\text{rot}}\vec{a} + \overrightarrow{\text{grad}}f \wedge \vec{a}$$

$$\text{ch}(u+v)\text{ch}(u-v) = \text{ch}^2u + \text{sh}^2v$$

$$\text{Équations de Maxwell dans le vide :} \begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} = 0 & \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Le câble, schématisé figure 1, est formé de deux cylindres métalliques, de sections circulaires, coaxiaux et de rayons respectifs  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ). Le premier cylindre 1 est plein, c'est l'âme du câble, et le deuxième 2 est creux, c'est la gaine. On supposera les cylindres de très grande conductivité; les charges et courants électriques qu'ils transportent seront, aux fréquences de travail, considérés comme surfaciques et le champ électromagnétique est nul dans le volume des conducteurs. De plus il ne circule aucun courant sur la surface extérieure de la gaine. L'espace entre les deux cylindres est rempli d'un milieu isolant homogène dont les caractéristiques sont supposées indépendantes de la fréquence; on admettra alors qu'il suffit de remplacer dans toutes les équations de Maxwell  $\epsilon_0$  par  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  où  $\epsilon_r$  est la permittivité relative de l'isolant.

Données numériques du câble :  $\phi_1 = 2\rho_1 = 1,0$  mm,  $\phi_2 = 2\rho_2 = 3,5$  mm,  $\epsilon_r = 2,25$ .

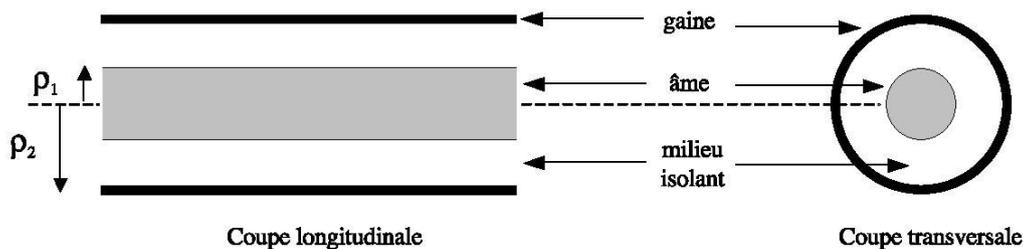


Figure 1 -Schéma du câble coaxial

Un point  $M$  entre les cylindres sera repéré par ses coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ ,  $Oz$  étant l'axe des cylindres. On désigne par  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  le repère orthonormé associé.

## I Caractéristiques électriques du câble

On cherche dans ces premières questions à identifier quelques quantités électriques caractéristiques du câble.

*Capacité linéique.* On suppose que l'âme porte la charge  $Q$  par unité de longueur.

1. En un point  $M$  compris entre les conducteurs, établir l'expression du vecteur champ électrique  $\vec{E}$  en fonction de  $Q$ , de  $\rho$  et  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ ; on négligera tout effet de bord.

2. En déduire l'expression de la différence de potentiel entre les cylindres,  $V_1 - V_2$ , en fonction de  $Q, \rho_1$  et  $\rho_2$ .
3. Exprimer la capacité linéique  $\Gamma$  du câble en fonction de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .
4. Calculer la valeur numérique de  $\Gamma$  et celle de  $V_1 - V_2$  pour  $Q = 1 \text{ nC.m}^{-1}$ . A quelle distance de l'axe le champ  $\vec{E}$  prend-il sa valeur maximale  $E_{max}$  dans le milieu isolant ? Calculer  $E_{max}$ .

*Inductance linéique.* On suppose le conducteur central parcouru par un courant surfacique continu d'intensité  $I$ .

5. Donner l'expression du vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  en fonction de  $I$  et de  $\rho$  en un point  $M$  compris entre les conducteurs ; on négligera tout effet de bord.
6. On considère un tronçon de longueur unité limité par deux plans orthogonaux à l'axe. Le flux magnétique propre  $\Phi$  de ce tronçon est le flux de  $\vec{B}$  à travers un demi-plan  $\theta = \text{Cste}$ , limité par les extrémités du tronçon. Trouver l'expression de  $\Phi$  en fonction de  $I, \rho_1$  et  $\rho_2$ .
7. En déduire l'inductance linéique du câble  $\Lambda$  en fonction de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .
8. Calculer la valeur numérique de  $\Lambda$ . A quelle distance de l'axe le champ  $\vec{B}$  prend-il sa valeur maximale  $B_{max}$  dans le milieu isolant ? Calculer  $B_{max}$  pour  $I = 100 \text{ mA}$ .
9. Si on suppose maintenant que l'intensité  $I$  est répartie en volume dans le conducteur central, l'inductance par unité de longueur sera-t-elle modifiée ?