

Première partie

Le gecko

Extrait de CCINP PC 2021

I Interactions entre molécules polaires

1. La polarité des molécule vient essentiellement des différences d'électronégativités entre les atomes. Dans HCl , le chlore étant plus électronégatif, il déforme le nuage électronique en attirant les électrons vers lui. Il en résulte une charge négative sur Cl et une charge positive sur H , donc un moment dipolaire (orienté de Cl vers H).

Par définition du moment dipolaire, on a ici $\vec{p}_1 = qa\vec{u}_z$.

2. D'après le principe de superposition, le potentiel électrostatique total est la somme de celui créé par la charge en P et celui créé par celle en N . D'après la formule de COULOMB, on a :

$$V_1(M) = V_P(M) + V_N(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 NM}$$

$$\text{avec } PM^2 = (\vec{PO} + \vec{OM})^2 = PO^2 + OM^2 + 2\vec{PO} \cdot \vec{OM} = \frac{a^2}{4} + r^2 - 2r\frac{a}{2}\cos\theta$$

$$PM^2 = r^2 \left(1 - \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Or dans l'approximation dipolaire, $a \ll r$ donc on peut écrire, au premier ordre en $\frac{a}{r}$: $\frac{1}{PM} = (PM^2)^{-1/2} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta \right)$

$$\text{De même : } \frac{1}{NM} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta \right).$$

$$\text{On a alors : } V_1(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta - \left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta \right) \right)$$

$$V_1(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{a}{r} \cos\theta = \frac{p_1 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

3. D'après le cours, $\vec{E}_1(M) = -\vec{\text{grad}} V_1(M)$, donc avec le formulaire de l'énoncé :

$$\vec{E}_1(M) = -\frac{\partial V_1}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

$$\text{On obtient donc : } \vec{E}_1(M) = +\frac{p_1 \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p_1 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$

qui correspond au résultat attendu.

4. Deux possibilités de raisonnement :

- Avec le couple $\Gamma = -p_2 E_1(M) \sin\alpha$ par rapport à l'axe de rotation. À l'équilibre, ce couple est nul, donc les positions d'équilibre sont en $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$. Or si on perturbe le système d'un petit angle $\varepsilon > 0$ au voisinage de $\alpha = 0$, le couple est négatif et ramène donc le dipôle vers la position d'équilibre $\alpha = 0$ qui est donc stable. Par contre, au voisinage de $\alpha = \pi$, $\Gamma = -p_2 E_1(M) \sin(\pi + \varepsilon) = +p_2 E_1(M) \sin\varepsilon > 0$: le couple entraîne le dipôle encore plus loin, cet équilibre est instable.

- Par l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{12} = -\frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 r^3} \cos\alpha$. Si on trace $\mathcal{E}_{12}$ en fonction de α , on constate aisément que le minimum est en $\alpha = 0$ qui correspond donc à une position d'équilibre stable.

Dans tous les cas, le couple tend à aligner les 2 dipôles (position $\alpha = 0$).

5. Pour $\alpha = 0$, on a $\mathcal{E}_{12} = -\frac{p^2}{2\pi\epsilon_0 r^3}$.

Application numérique : $\mathcal{E}_{12} = -1,6 \cdot 10^{-21}$ J et $k_B T = 4,0 \cdot 10^{-21}$ J

L'énergie d'agitation thermique est suffisante pour que les dipôles soient mobiles et ne restent pas alignés en permanence.

6. Application numérique : $C_K \sim 10^{-77}$ J.

$$\text{La force correspondante est } \vec{F}_{12} = -\vec{\text{grad}} \langle \mathcal{E}_{12} \rangle = -\frac{6C_K}{r^7} \vec{u}_r.$$

Cette force est orientée selon $-\vec{u}_r$ donc elle est attractive.

II Calcul de la force d'adhérence du gecko au plafond

7. Une force surfacique est une pression, donc $A = 6\pi D^3 f(D)$ est une pression multipliée par un volume : c'est donc bien une énergie (cf $H = U + PV$ par exemple).
8. On applique le principe fondamental de la statique au gecko, soumis à son poids et à la force d'adhérence. Cette dernière doit donc (en norme) compenser le poids. Si on note x le pourcentage de sétules utilisées, $N = 500 \times 6.10^6$ le nombre total de sétules et $S = \ell^2$ la surface de contact, on peut écrire :

$$mg = xN \cdot \frac{A}{6\pi D^3} \ell^2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{mg}{N \frac{A}{6\pi D^3} \ell^2}}$$

Application numérique : $x = 8.10^{-4} = 0,08\%$

On obtient le bon ordre de grandeur, ce qui pourrait valider l'hypothèse. Mais il manque un facteur 2 : si le gecko n'utilise que 0,04% de ses sétules, notre calcul semble montrer qu'il ne supporterait pas son poids. Il y a donc sans doute un autre effet (mais le calcul est assez approximatif).

9. Le mouvement se décompose en 2 phases :

- La première phase est une chute libre sur une hauteur $h = 10$ cm. En négligeant les frottements de l'air, on peut exploiter la conservation de l'énergie mécanique entre le moment du lâcher (sans vitesse initiale) et le moment où le gecko se rattrape, ce qui donne la vitesse atteinte au début du freinage :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_f = 0 + mgz_i \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2gh}}$$

- Durant la phase de freinage, on peut reprendre le même principe, mais l'énergie mécanique n'est plus conservée. Le travail de la force d'adhérence (de norme $F = 5$ N si le gecko n'utilise que la moitié de l'adhérence maximale) s'écrit $W = -Fd$ où d est la distance de "freinage". On a

donc :

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 - mgd = -Fd \Rightarrow \boxed{d = \frac{mv_0^2}{2(F - mg)} = \frac{mgh}{F - mg}}$$

Application numérique : $d \simeq 11$ cm.

Deuxième partie

Plasma et fusion

Extrait de CCINP PC 2024

I Confinement magnétique du plasma

I.1 Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

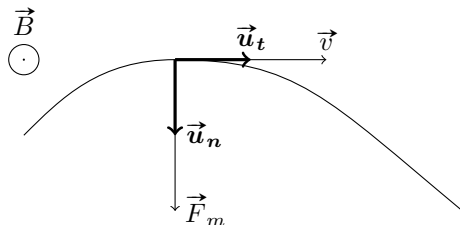
1. C'est la démonstration du cours, en appliquant le théorème d'AMPÈRE sur un contour rectangulaire.

On trouve $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{d} I \vec{u}_z$.

2. Par définition, la puissance de la force magnétique est $\mathcal{P} = \vec{F}_m \cdot \vec{v}$. Or la force magnétique s'écrit $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ donc est orthogonale à la vitesse : sa **puissance est donc nulle**.

D'après le théorème de la puissance cinétique, si la force magnétique est la seule force extérieure, l'énergie mécanique se conserve (donc la norme de la vitesse est constante – mais pas sa direction).

3. La base de FRENET est constitué du vecteur $\vec{u}_t$ tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de la vitesse, et du vecteur $\vec{u}_n$ orthogonal à la trajectoire et orienté vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire.



4. Dans le repère de FRENET, $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \vec{u}_n$.

Or ici la norme de la vitesse est constante donc

$$\vec{a} = \frac{v_0^2}{r} \vec{u}_n.$$

Par application du PFD (seule la projection sur $\vec{u}_n$ est non nulle), on obtient :

$$m\vec{a} = \frac{v_0^2}{r} \vec{u}_n = +e\vec{v} \wedge \vec{B} = ev_0 B_0 \vec{u}_n$$

Les facteurs v_0 , B_0 , e et m sont constants, donc le rayon de courbure l'est

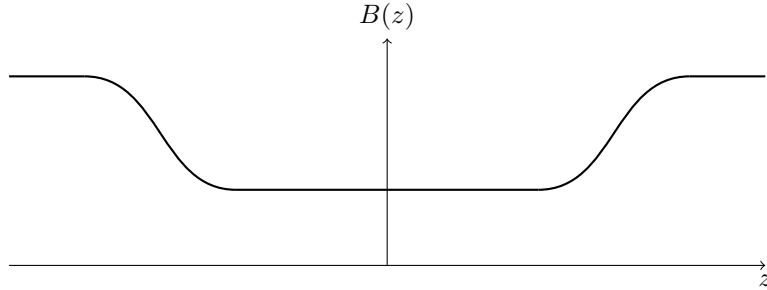
aussi et vaut $r_L = \frac{v_0}{\omega_c}$ avec $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$.

La trajectoire est donc **circulaire**.

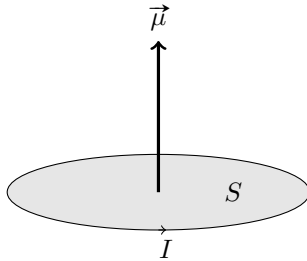
5. Si $\vec{B}$ est selon $\vec{u}_z$, alors la force magnétique est orthogonale à $\vec{u}_z$. Il n'y a aucune accélération selon $\vec{u}_z$ donc la composante v_z de la vitesse du cation selon $\vec{u}_z$ est constante. Si la vitesse initiale vaut v_0 et est selon $\vec{u}_z$ alors la force magnétique est constamment nulle et le **mouvement est rectiligne et uniforme**. La particule part alors vers $z \rightarrow \infty$: le **cation n'est pas confiné**.
6. D'après ce qui précède, la particule chargée décrit une hélice suivant l'axe du champ magnétique. Dans cette configuration toroïdale, cet axe est en fait replié sur lui-même, formant une boucle : la particule est désormais confinée dans le dispositif.
7. *Application numérique* : $r_L \approx 1$ mm. Ce rayon est très petit devant les dimensions du dispositif.

I.2 Bouteille magnétique

8. Sur les bords de la bouteille magnétique, les lignes de champ sont plus serrées donc le champ est plus intense (la justification n'est pas demandée, mais ceci est dû à la conservation du flux magnétique car $\text{div} \vec{B} = 0$).



9. Par définition, le moment magnétique d'une boucle de courant plane est $\vec{\mu} = IS\vec{n}$ où I est le courant qui la parcourt, S la surface délimitée par la boucle, et $\vec{n}$ le vecteur normal à la surface, orienté positivement par rapport au courant.



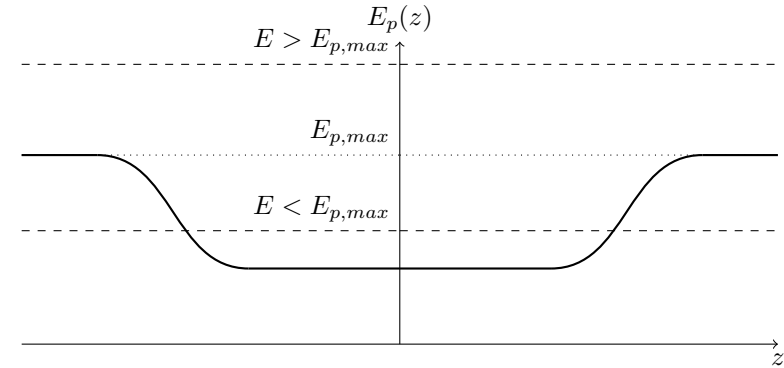
10. Calculons d'abord le courant. Comme le proton fait un tour par période, le courant vaut $I = \frac{e}{T} = e \frac{v_{\perp}}{2\pi r_L}$. Mais en reprenant le schéma de la question 3., on constate que le mouvement se fait dans le sens inverse du sens trigonométrique. Comme la surface vaut $S = \pi r_L^2$, on obtient :

$$\vec{\mu} = -\pi r_L^2 e \frac{v_{\perp}}{2\pi r_L} \vec{u}_z = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \vec{u}_z$$

11. $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2$. Ainsi, $E = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 + E_p$ n'est autre que l'énergie cinétique totale de la particule, dont on a démontré qu'elle était constante.

$\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$ est son énergie cinétique pour son mouvement selon l'axe. Si on interprète ceci du point de vue du dipôle se déplaçant selon (Oz) , $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$ est son énergie cinétique et E son énergie mécanique. On s'est ramené à un problème à 1D selon (Oz) .

12. $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = +\mu B(z)$ car $\vec{\mu}$ est constant et orienté selon $-\vec{u}_z$. Le profil est donc proportionnel à celui dessiné plus haut.



Si $E < E_{p,max}$, comme $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 \geq 0$, seule la zone où $E > E_p$ est accessible : la particule est confinée, dans un état lié. Elle est réfléchiée à chaque extrémité. Sinon (si $E > E_{p,max}$) elle est dans un état libre.

II Échauffement du plasma : chauffage ohmique par induction

13. On calcule le flux du champ créé par la bobine à travers la spire : $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Or le champ est uniforme pour $r < a_1$ et nul au-delà, donc $\Phi = \pi a_1^2 \beta i_1$.

Par identification avec la définition de M ($\Phi = M i_1$), on obtient

$$M = \pi a_1^2 \beta$$

Application numérique : $\beta = \frac{B}{i_1} = \frac{13}{46.10^3}$ USI donc $M \approx 3,5.10^{-3}$ H.

14. La loi des mailles dans le circuit 2 associée à la loi d'OHM et à la loi de FARADAY donne $e = R_2 i_2 = -\frac{d\Phi_{tot}}{dt}$ avec $\Phi_{tot} = L_2 i_2 + M i_1$. On a donc :

$$R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau_2} = \frac{I_0}{\tau_1}$$

avec $\tau_1 = t_1 \frac{L_2}{M}$ et $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$.

15. La solution est de la forme $i_2(t) = A e^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0$. Comme $i_2(0) = 0$, on a

$$i_2(t) = \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0 (1 - e^{-t/\tau_2}).$$

En supposant $t \ll \tau_2$, au premier ordre en t/τ_2 , on trouve

$$i_2(t) \approx \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0 \frac{t}{\tau_2} = I_0 \frac{t}{\tau_1}.$$

16. La puissance instantanée reçue par R_2 s'écrit $\mathcal{P}_2 = R_2 i_2^2$ donc en intégrant :

$$\mathcal{E}_2 = \int_0^{t_1} R_2 \left(I_0 \frac{t}{\tau_1} \right)^2 dt = R_2 \left(\frac{I_0}{\tau_1} \right)^2 \frac{t_1^3}{3}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{R_2 M^2 I_0^2}{3 L_2^2} t_1$$

Cette énergie est reçue par le plasma et augmente sa température.

Supercondensateur

Extrait de CCS2 PSI 2025

I Étude d'un supercondensateur

Q1) On suppose le plan chargé confondu avec le plan Oyz (plan $x = 0$). En un point M , tout plan perpendiculaire au plan chargé est plan de symétrie de la distribution de charge, $\vec{E}_p(M)$ est perpendiculaire au plan $x = 0$:

$$\vec{E}_p(M) = E(M) \vec{u}_x$$

Le plan chargé est infini, donc invariant par toute translation parallèlement à lui-même, donc perpendiculairement à $\vec{u}_x$:

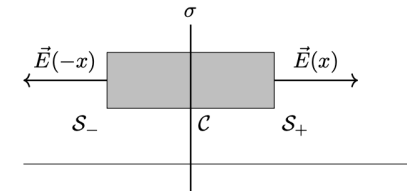
$$\vec{E}_p(M) = E(x) \vec{u}_x$$

Le plan chargé est plan de symétrie pour lui-même, donc en deux points M et M' symétriques par rapport au plan chargé, le champ est symétrique par rapport au plan chargé. Par conséquent comme $\vec{E}$ est orthogonal au plan :

$$\vec{E}_p(-x) = -\vec{E}_p(x) ; E(-x) = -E(x)$$

On applique le théorème de Gauss à un tube de champ, cylindre $\mathcal{C}$ de génératrices parallèles à $\vec{u}_x$, de section droite S , fermé par deux surfaces planes S_+ et S_- situées dans les plans parallèles au plan chargé, d'abscisses $x > 0$ et $-x$ selon $\vec{u}_x$, en tenant compte de la permittivité diélectrique relative :

$$\oiint_{\mathcal{C} \cup S_+ \cup S_-} \vec{E}_p \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$



La contribution de $\mathcal{C}$ est nulle car il s'agit d'un tube de champ : $\vec{E}_p \perp d\vec{S}_{\text{ext}}$. Les contributions de S_+ et S_- ont pour expressions

$$\iint_{S_+} \vec{E}_p \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = \iint_{S_+} E(x) \vec{u}_x \cdot dS \vec{u}_x = SE(x)$$

$$\iint_{S_-} \vec{E}_p \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = \iint_{S_-} E(-x) \vec{u}_x \cdot dS (-\vec{u}_x) = -SE(-x) = SE(x)$$

Ce tube de champ découpe une surface d'aire S sur le plan chargé, donc

$$Q_{\text{int}} = \sigma S$$

Finalement le théorème de Gauss s'écrit

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = 2SE(x > 0) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

d'où on déduit l'expression du champ électrique

$$\vec{E}_p(x > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x ; \vec{E}_p(x < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

On utilise le théorème de superposition pour calculer le champ total créé par les 4 plans chargés, en notant $\vec{E}_{p,\sigma,\pm}$ le champ créé par densité surfacique de charge σ du côté des x négatifs ($-$) ou des x positifs ($+$). Dans l'espace inter-électrodes, on distingue ainsi 3 zones :

— $-a < x < -a + \delta$:

$$\vec{E} = \vec{E}_{p,\sigma,+} + \vec{E}_{p,-\sigma',-} + \vec{E}_{p,\sigma',-} + \vec{E}_{p,-\sigma,-} = \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (\sigma + \sigma' - \sigma' + \sigma) \vec{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

— $-a + \delta < x < a - \delta$:

$$\vec{E} = \vec{E}_{p,\sigma,+} + \vec{E}_{p,-\sigma',+} + \vec{E}_{p,\sigma',-} + \vec{E}_{p,-\sigma,-} = \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (\sigma - \sigma' - \sigma' + \sigma) \vec{u}_x = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

— $a - \delta < x < a$:

$$\vec{E} = \vec{E}_{p,\sigma,+} + \vec{E}_{p,-\sigma',+} + \vec{E}_{p,\sigma',+} + \vec{E}_{p,-\sigma,-} = \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (\sigma - \sigma' + \sigma' + \sigma) \vec{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

Q2) Le potentiel vérifie $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, et sous forme intégrale $V(A) - V(B) = \int_B^A \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$. On peut donc écrire entre les deux électrodes, avec $\vec{E}(x) = E(x) \vec{u}_x$:

$$U = V(-a) - V(a) = \int_{-a}^a E(x) dx = \int_{-a}^{-a+\delta} \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} dx + \int_{-a+\delta}^{a-\delta} \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r} dx + \int_{a-\delta}^a \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} dx$$

$$U = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} (\sigma \delta + (\sigma - \sigma')(2a - 2\delta) + \sigma \delta) = \frac{2a\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} - \frac{2(a - \delta)\sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Q3) L'électrolyte est conducteur, donc la présence d'un champ électrique dans la région $-a + \delta < x < a - \delta$ non nul entraîne l'existence d'un courant électrique source d'une variation temporelle des densités surfaciques de charge sur les doubles couches : on se trouve alors en régime variable. On en déduit qu'en régime permanent le champ électrique doit être nul dans la région $-a + \delta < x < a - \delta$. D'après Q1) le champ dans cette région vaut $\frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$: en régime indépendant la nullité du champ électrique entraîne $\sigma' = \sigma$. L'expression de U devient

$$U = \frac{2\delta}{\epsilon_0 \epsilon_r} \sigma$$

En régime permanent, la densité surfacique de charge de l'électrode $x = -a$ vaut

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2\delta} U$$

On en déduit la charge Q puis la capacité C_0 du supercondensateur

$$Q = \sigma S = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{2\delta} U = C_0 U$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{2\delta}$$

Pour un condensateur à air de même géométrie (plan, électrodes de surface S , distance entre électrodes $2a$)

$$C_{\text{air}} = \frac{\epsilon_0 S}{2a}$$

Soit un rapport ($\epsilon_r > 1$)

$$\frac{C_0}{C_{\text{air}}} = \epsilon_r \frac{a}{\delta} \gtrsim \frac{10^{-6}}{10^{-8}} = 100 \gg 1$$

$C_0 \gg C_{\text{air}}$, d'où l'appellation supercondensateur.

II Modèle électrocinétique du supercondensateur

Q4) Dans la zone $-a + \delta < x < a - \delta$, $\vec{E} = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$, d'où une densité de courant

$$\vec{j}_{\text{elec}} = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma(\sigma - \sigma')}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

Le courant électrique reçu par le plan $x = a - \delta$ de l'électrolyte (situé en $x < a - \delta$) a pour expression

$$I_{\text{reçu}} = \iint \vec{j} \cdot dS \vec{u}_x = \frac{\gamma(\sigma - \sigma')}{\epsilon_0 \epsilon_r} S$$

Comme ce plan ne reçoit de charge que de l'électrolyte (l'énoncé précise que la double couche est isolante), le bilan de charges entre t et $t + dt$ s'écrit pour ce plan

$$q'(t + dt) - q'(t) = \frac{dq'}{dt} dt = I_{\text{reçu}} dt = \frac{\gamma(\sigma - \sigma')}{\epsilon_0 \epsilon_r} S dt$$

$$\frac{dq'}{dt} = \frac{\gamma(\sigma - \sigma')}{\epsilon_0 \epsilon_r} S$$

Q5) Pour $t > 0$ la tension U est constante, et d'après Q2)

$$U = \frac{2a}{\epsilon_0 \epsilon_r} \sigma - \frac{2(a - \delta)}{\epsilon_0 \epsilon_r} \sigma'$$

ce qui permet d'exprimer σ à tout instant :

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2a} U + \frac{a - \delta}{a} \sigma'$$

D'autre part $q' = \sigma' S$, donc en remplaçant q' et σ par leurs expressions en fonction de σ'

$$S \frac{d\sigma'}{dt} = \frac{\gamma S}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2a} U + \frac{a - \delta}{a} \sigma' - \sigma' \right) = \frac{\gamma S U}{2a} - \frac{\gamma S \delta}{\epsilon_0 \epsilon_r a} \sigma'$$

après simplification par S on obtient l'équation différentielle proposée par l'énoncé

$$\frac{d\sigma'}{dt} + \frac{\gamma \delta}{\epsilon_0 \epsilon_r a} \sigma' = \frac{\gamma U}{2a}$$

On identifie sur cette équation différentielle du premier ordre en σ' le temps caractéristique

$$\tau = \frac{a \epsilon_0 \epsilon_r}{\delta \gamma}$$

Si on modélise le supercondensateur par l'association série d'un condensateur et d'une résistance, l'équation d'évolution de la charge q du supercondensateur soumis à la tension U s'écrit

$$u_C + u_R = \frac{q}{C_0} + R_0 \frac{dq}{dt} = U$$

Or en notant $q' = S\sigma'$ la charge associée à σ' , l'équation de la question précédente s'écrit

$$\frac{dq'}{dt} + \frac{\gamma \delta}{\epsilon_0 \epsilon_r a} q' = \frac{\gamma S U}{2a}$$

ou

$$U = \frac{2a}{\gamma S} \frac{dq'}{dt} + \frac{2\delta}{\epsilon_0 \epsilon_r S} q' = R_0 \frac{dq'}{dt} + \frac{q'}{C_0}$$

soit par identification

$$R_0 = \frac{2a}{\gamma S} ; C_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{2\delta}$$

On retrouve la valeur de C_0 , et on peut interpréter R_0 comme la résistance associée à l'électrolyte de conductivité γ et d'épaisseur approchée $2a$.

Q6) La tension $u_C = q/C_0$ aux bornes d'une capacité est continue, donc entre les instants $t = 0^-$ et $t = 0^+$

$$R_0(i_0^+ - i_0^-) + \frac{q(0^+) - q(0^-)}{C_0} = R_0(i_0^+ - i_0^-) = U(0^+) - U(0^-)$$

soit

$$R_0 = \frac{U(0^+) - U(0^-)}{i_0^+ - i_0^-} = \frac{2,95 - 3,00}{33} = 1,5 \times 10^{-3} \Omega$$

Pour $0 < t < T$, i est constant, d'où

$$\frac{q(T^-) - q(0^+)}{C_0} + R_0(i(T^-) - i(0^+)) = \frac{i(T - 0)}{C_0} = U(T^-) - U(0^+)$$

soit

$$C_0 = \frac{iT}{U(T^-) - U(0^+)} = \frac{-33 \times 14,5}{1,5 - 2,95} = 3,3 \times 10^2 \text{ F}$$

Caractéristiques électriques d'un câble coaxial

Extrait de X PC 2006

1. Tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie pour $\vec{E}$, ainsi que tout plan orthogonal à l'axe Oz . Le champ électrique est donc radial. Les invariances par rotation autour de Oz et par translation parallèlement à Oz permettent d'écrire

$$\vec{E} = E(\rho)\vec{e}_\rho$$

On applique le théorème de Gauss à un cylindre Σ de hauteur h , d'axe Oz et de rayon ρ . La charge électrique localisée à l'intérieur de ce cylindre est Qh pour $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$. Le flux de $\vec{E}$ à travers Σ est

$$\Phi_\Sigma = \oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 2\pi\rho h E(\rho)$$

On en déduit que

$$2\pi\rho h E(\rho) = \frac{Qh}{\epsilon_0\epsilon_r}$$

soit

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho}\vec{e}_\rho$$

2. Compte tenu des symétries, le champ électrique, *en régime statique*, s'exprime en fonction du potentiel par

$$\vec{E} = -V'(\rho)\vec{e}_\rho$$

On a donc

$$V'(\rho) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon\rho}$$

soit, en intégrant

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

3. La capacité linéique est définie par

$$Q = \Gamma(V_1 - V_2) \quad \text{soit} \quad \Gamma = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

4. *Application numérique* : $\Gamma = 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ F.m}^{-1}$; $V_1 - V_2 = 10 \text{ V}$; $E_{\max} = E(\rho_1) = 1,6 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1}$.

5. Tout plan $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour les courants, donc un plan d'antisymétrie pour $\vec{B}$. Le champ magnétique est donc orthoradial. Les invariances par rotation autour de Oz et par translation parallèlement à Oz permettent d'écrire

$$\vec{B} = B(\rho)\vec{e}_\theta$$

Appliquons le théorème d'Ampère à un cercle $\mathcal{C}$ d'axe Oz et de rayon ρ ; l'intensité enlacée par $\mathcal{C}$ est I pour $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$. La circulation de $\vec{B}$ le long de ce cercle étant égale à $2\pi\rho B(\rho)$, le théorème d'Ampère conduit à

$$2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 I$$

soit

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\theta$$

6. Le flux de $\vec{B}$ à travers la surface donnée dans l'énoncé est

$$\Phi = \int_{\rho_1}^{\rho_2} B(\rho) d\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

7. L'inductance linéique du câble est définie par

$$\Phi = \Lambda I \quad \text{soit} \quad \Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

8. *Application numérique* : $\Lambda = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

9. Si l'intensité est répartie en volume dans le conducteur central, le flux de $\vec{B}$ sera plus grand, car il y aura une contribution supplémentaire pour $\rho \in [0, \rho_1]$.