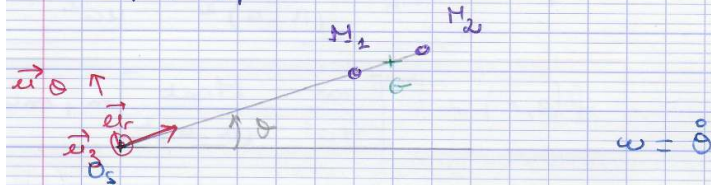


Le seigneur des anneaux

II - Etude dynamique des anneaux de Saturne

1. Les anneaux de Saturne ne sont pas des solides

$$\Sigma = \{M_1, M_2\}$$



R_{Sa} = référentiel Saturnien

R_{sa} = référentiel saturno-douplet

a. Dans R_{Sa} galiléen G a un mouvement circulaire uniforme.

$$\vec{O_s G} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{v}(G) = r \omega \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}(G) = -r \omega^2 \vec{e}_r$$

D'après le principe fondamental de la dynamique

$$2m(-r\omega^2)\vec{e}_r = -\Gamma \frac{M_{Sa} m}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\text{Soit } \boxed{\frac{\Gamma M_{Sa}}{r^2} = \omega^2 r} \quad \text{OK.}$$

b. Dans R_{sa} non galiléen M_1 est soumis à

* l'interaction gravitationnelle Saturnienne

$$\vec{F}_{Sa \rightarrow M_1} = -\Gamma \frac{M_{Sa} m}{(r-a)^2} \vec{e}_r$$

* l'interaction gravitationnelle de G part de M_2

$$\vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1} = +\Gamma \frac{m^2}{(2a)^2} \vec{e}_r$$

* $\vec{F}_{\text{cent}}$ force d'inertie d'entraînement

$$\vec{F}_{\text{cent}} = m \omega^2 (r-a) \vec{e}_r$$

* $\vec{F}_{ie} = \vec{0}$ car $\vec{v} = \vec{0}$

$$\Sigma_i \vec{F}_i = +m \left[-\Gamma \frac{M_{Sa}}{(r-a)^2} + \Gamma \frac{m}{4a^2} + \omega^2 (r-a) \right] \vec{e}_r$$

$$\boxed{\phi(a, r) = \Gamma \left[\frac{m}{4a^2} - \frac{M_{Sa}}{(r-a)^2} \right] m + m \omega^2 (r-a)}$$

$$\textcircled{c} \quad \phi(a, r) = \frac{\Gamma m^2}{4a^2} - \frac{\Gamma m M_{Sa}}{r^2 (1 - \frac{a}{r})^2} + m \omega^2 r (1 - \frac{a}{r})$$

$$\text{avec } r \omega^2 = \frac{\Gamma M_{Sa}}{r^2}$$

$$\begin{aligned} \phi(a, r) &= \frac{\Gamma m^2}{4a^2} + \frac{\Gamma M_{Sa} m}{r^2} \left[-1 + \frac{2a}{r} + 1 - \frac{a}{r} \right] \\ &= \frac{\Gamma m^2}{4a^2} - \frac{3\Gamma M_{Sa} m a}{r^3} \end{aligned}$$

d. Il y a dislocation si $\phi(a, r) < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3\Gamma M_{Sa} m a}{r^3} > \frac{\Gamma m^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow 12 a^3 M_{Sa} > m r^3$$

$$\text{soit } r^3 < 12 \Gamma_{Sa} \frac{a^3}{m}$$

$$r_0 = \sqrt[3]{12 \frac{\Gamma_{Sa}}{m}}$$

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 6 \cdot 10^{26}}{720}} \quad r_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Bon ordre de grandeur

2) Division des anneaux

R_{sp} = référentiel saturno-Plan.

(a) Orbite circulaire $\vec{O}_S \vec{r} = R \vec{e}_r$
 $\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$
 $\vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$

Deuxième loi de Newton avec $\vec{F} = -\Gamma \frac{M_{sat} m}{R^2} \vec{e}_r$

$$m \vec{a} = \vec{F}$$

$$+ m R \dot{\theta}^2 = + \Gamma \frac{M_{sat} m}{R^2}$$

$$\text{ou } \frac{v^2}{R} = \Gamma \frac{M_{sat}}{R^2}$$

$$v = \sqrt{\Gamma \frac{M_{sat}}{R}}$$

Plus R est grand, plus v est faible.

(b) cf document

(c) Dans le référentiel R_{sp} d'après la loi de composition des vitesses

$$\vec{v}_{A/R_{sa}} = \vec{v}_{A/R_{sp}} + \vec{v}_{entr}$$

$$\text{avec } \vec{v}_{entr} = r_A \dot{\theta}_{Plan} \vec{u}_\theta = r_A \cdot \frac{v_{Plan}}{R_{Plan}} \vec{u}_\theta$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{A/R_{sp}} &= \vec{v}_{A/R_{sa}} - \frac{r_A}{R_{Plan}} v_{Plan} \vec{u}_\theta \\ &= \left(\sqrt{\Gamma \frac{M_{sat}}{r_A}} - \frac{r_A}{R_{Plan}} \sqrt{\Gamma \frac{M_{sat}}{r_{Plan}}} \right) \vec{u}_\theta \\ &= \sqrt{\Gamma \frac{M_{sat}}{r_{Plan}}} \left(\sqrt{\frac{r_{Plan}}{r_A}} - \frac{r_A}{r_{Plan}} \right) \vec{u}_\theta \end{aligned}$$