

Devoir surveillé n°3

Samedi 23 novembre 2025

Durée : 4h00

- Vous devez vérifier que le sujet comprend 14 pages numérotées et un document Annexe à rendre.
- Vous êtes invités à porter une attention toute particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Toute réponse devra être justifiée et ce, même si l'énoncé ne le précise pas (sauf mention particulière).
- Vous devez établir une relation littérale avant d'effectuer toute application numérique (sauf mention particulière).
- Toute relation littérale présentant une erreur flagrante d'homogénéité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- Le téléphone portable est strictement interdit. Il doit être rangé éteint dans le sac.
- La calculatrice est autorisée.

Première partie

Étude d'un disque optique numérique

Sur un compact-disc, les informations sont stockées sous forme de creux et de plats le long d'une piste métallique réfléchissante en forme de spirale. Celle-ci démarre à une distance $R_1 = 2,50$ cm de l'axe du CD et se termine à $R_2 = 5,80$ cm.

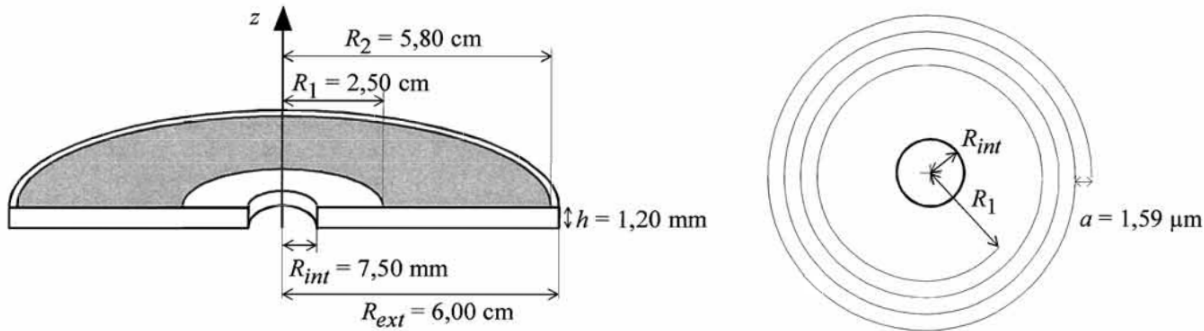


figure 1

Sur la figure 1 qui donne une vue en perspective d'un demi CD, la zone grisée correspond à la portion du CD occupée par la piste métallique, la partie blanche est le substrat en polycarbonate. Les spécifications du CD recommandent une vitesse de lecture linéaire $v_0 = 1,22$ m.s⁻¹ et un pas de spirale de $a = 1,59$ μm. On peut noter que $a \ll R_1$.

I Étude de la piste

1. Établir l'expression de la vitesse angulaire $\Omega(r)$ de rotation que doit avoir le disque lorsque la tête de lecture est à une distance r de l'axe de rotation et qu'elle voit défiler la piste à la vitesse linéaire constante v_0 .
2. Dans l'intervalle $[R_1; R_2]$, pour quelle valeur de r la fonction $\Omega(r)$ est-elle maximale ?
3. Donner la valeur numérique de la vitesse angulaire maximale Ω_{max} que doit posséder le CD au cours de la lecture de sa piste à la vitesse v_0 .
4. Les lecteurs de CD-ROM ont des vitesses beaucoup plus importantes que celles des lecteurs de CD audio. Un lecteur dit "52 x" a ainsi une vitesse de lecture linéaire égale à 52 v_0 . Quelle est alors la valeur numérique, exprimée en tr/min, de sa vitesse angulaire maximale de rotation $\Omega_{0,max}$?

II Mécanique en référentiel non galiléen

Afin de rendre plus rapide l'accès aux données, les vitesses de rotation des lecteurs ont augmenté au fil des années. Des expériences menées sur des CD-ROM ont montré qu'ils pouvaient se briser en une multitude de petits fragments lorsque la vitesse angulaire devient supérieure à $3,00 \cdot 10^4$ tr.min⁻¹.

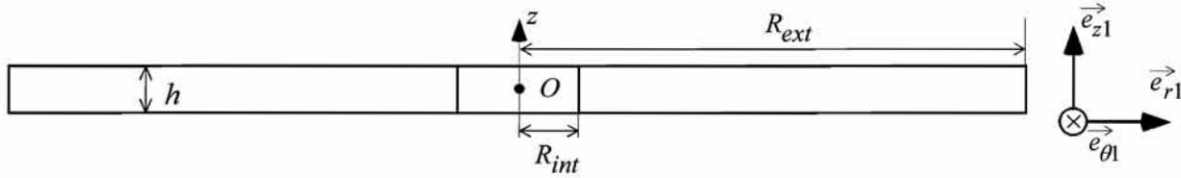


figure 2

Un lecteur de CD-ROM est fixé sur une table. On suppose que le référentiel $\mathcal{R}_0$ lié à la table est galiléen. On lui associe un repère orthonormé direct (O, x, y, z) . À l'intérieur du lecteur, un dispositif d'entraînement communique au CD-ROM un mouvement de rotation autour de l'axe Oz , vertical ascendant. La vitesse angulaire est notée Ω .

Dans cette question, le CD-ROM est modélisé par un cylindre homogène de hauteur $h = 1,20$ mm, de rayon $R_{ext} = 6,00$ cm, percé en son centre d'un trou circulaire de rayon $R_{int} = 7,50$ mm. Sa masse volumique est $\mu = 1,20 \cdot 10^3$ kg.m⁻³.

Soit $\mathcal{R}_1$, le référentiel lié au disque. On lui associe le repère orthonormé direct (O, x_1, y_1, z_1) , l'axe Oz_1 étant confondu avec l'axe Oz . On repère la position d'un point M dans $\mathcal{R}_1$ par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) liées à la base locale $(\vec{e}_{r1}, \vec{e}_{\theta1}, \vec{e}_{z1})$.

On suppose que la vitesse de rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ est constante et notée Ω .

On pose sur le CD un point matériel M de masse m .

1. Exprimer dans la base locale la force d'inertie d'entraînement à laquelle est soumis M dans $\mathcal{R}_1$.
2. Exprimer dans la base locale la force d'inertie de Coriolis à laquelle est soumis M dans $\mathcal{R}_1$.
3. Il existe des frottements solides entre M et le CD. On suppose que la réaction du CD sur M vérifie les lois de Coulomb :
 - en l'absence de mouvement relatif, $\|\vec{R}_T\| \leq f\|\vec{R}_N\|$;
 - en cas de mouvement relatif, $\|\vec{R}_T\| = f\|\vec{R}_N\|$ et $\vec{R}_T$ s'oppose au mouvement ;
 où f est le coefficient de frottement entre M et le CD.

Montrer que le point M reste immobile dans $\mathcal{R}_1$ si $r < r_\ell$ où l'on précisera l'expression de r_ℓ .

4. On creuse une rainure sur le disque : le point M est astreint à se déplacer selon $\vec{e}_{r1}$. On néglige les frottements. À $t = 0$, on pose le point M en $r(t = 0) = r_0$ sans vitesse initiale dans le référentiel $\mathcal{R}_1$. Établir l'équation du mouvement.
5. Déterminer $r(t)$ et l'expression de la réaction du disque.

III Résistance mécanique des disques optiques numériques

On se place dans le référentiel $\mathcal{R}_1$. Afin d'étudier les forces qui assurent la cohésion d'un CD-ROM en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω_1 , on considère une portion de disque dont la distance à l'axe de rotation s'étend de r_1 à $r_1 + dr_1$.

Au sein de cette couronne circulaire, on isole un élément de largeur angulaire $d\theta_1$ situé dans le domaine angulaire $[-\frac{d\theta_1}{2}; \frac{d\theta_1}{2}]$.

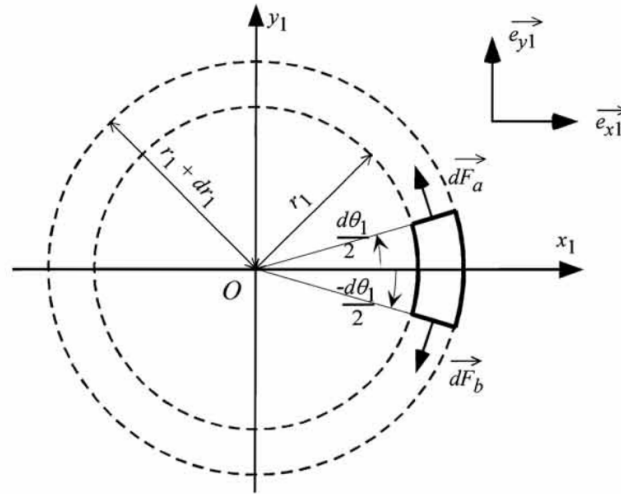


figure 3

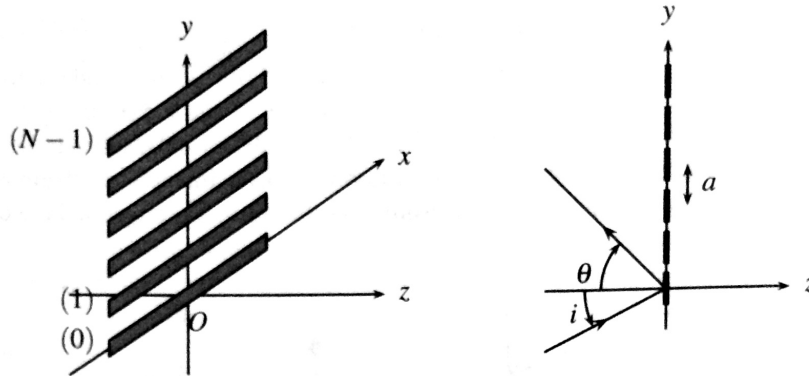
1. Quelle est l'expression de la masse dm de cet élément de CD-ROM d'épaisseur h ?
2. Quelle est, dans la base $(\vec{e}_{x1}, \vec{e}_{y1})$, l'expression de la force d'inertie d'entraînement $\vec{dF}_{ie}$ qui s'exerce sur l'élément de masse dm ?
3. On note $\vec{dF}_a$ et $\vec{dF}_b$ les forces exercées sur l'élément considéré par deux secteurs angulaires voisins (figure 3). Soit σ la contrainte (force normale par unité de surface) à l'interface entre deux éléments de la portion de disque. On a donc $\|\vec{dF}_a\| = \|\vec{dF}_b\| = \sigma dS$ avec $dS = h dr_1$, la surface rectangulaire de séparation. Quelle est la direction de $\vec{dF}_a + \vec{dF}_b$? Montrer qu'à l'ordre 1 en $d\theta_1$, on a

$$\vec{dF}_a + \vec{dF}_b = -\sigma dS d\theta_1 \vec{e}_{x1}$$

4. En écrivant l'équilibre dans $\mathcal{R}_1$ de l'élément de masse dm , exprimer σ en fonction de μ , r_1 et Ω .
5. Pour quelle valeur de r_1 , la contrainte σ est-elle maximale ?
6. On donne la contrainte de rupture du polycarbonate : $\sigma_{rup} = 65,0$ MPa. Exprimer puis calculer la vitesse angulaire Ω_{max} à partir de laquelle le disque risque de se briser.
Le calcul ci-dessus ne donne qu'un ordre de grandeur dans la mesure où il ne prend pas en compte les interactions entre les différentes couronnes.

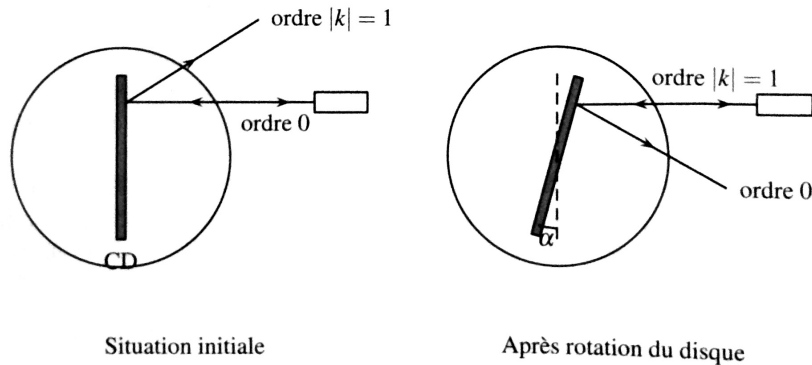
IV Comportement optique

La surface gravée du CD (spirale de pas a) peut être modélisée, localement, par un ensemble de N miroirs parallèles identiques entre eux, régulièrement espacés d'une distance a (voir figure ci-dessous). L'indice de l'air est confondu avec celui du vide.



Attention, les angles sont ici algébriques : $i > 0$ et $\theta < 0$

1. Seuls des faisceaux lumineux parallèles sont envisagés. La direction de la lumière incidente est contenue dans le plan (yOz) . Les rayons lumineux réfléchis par le CD sont aussi contenus dans le plan (yOz) . Le disque est éclairé sous un angle d'incidence i .
 - (a) Déterminer l'expression de la différence de marche entre deux rayons réfléchis consécutifs.
 - (b) Définir les directions θ_k , où k est un nombre entier relatif, appelé ordre d'interférence, pour lesquelles les ondes réfléchies par les miroirs interfèrent de façon totalement constructive.
2. On réalise l'expérience suivante. Le disque compact est éclairé en incidence normale. On tourne ensuite le disque d'un angle α afin que le faisceau diffracté par le disque dans l'ordre $|k| = 1$ soit dirigé dans la direction du faisceau lumineux incident (voir figure suivante)



- (a) Établir la relation liant a , λ_0 et α .
- (b) Pour $\lambda_0 = 650,0 \text{ nm}$, on mesure $\alpha = 12^\circ 40'$. En déduire une valeur numérique de a . Est-il possible d'observer la spirale gravée sur le disque à l'aide d'un microscope optique ?
- (c) La spirale est gravée depuis l'intérieur du disque (rayon R_1) vers l'extérieur (rayon R_2). Estimer la longueur de cette spirale sur un CD.
- (d) Sur la spirale sont gravés des motifs (creux ou plats), d'une longueur voisine du micromètre. Chacun de ces motifs peut être associé à un bit de codage. En déduire une estimation de la capacité de ce CD en Mo, sachant qu'un Mo représente 10^6 octets et que chaque octet est un ensemble de 8 bits.

Deuxième partie

Faire l'image d'une exoplanète

La détection des exoplanètes, planètes situées en dehors de notre système solaire, constitue l'un des domaines les plus fascinants et dynamiques de l'astronomie moderne. Depuis la découverte de la première exoplanète en 1995, les scientifiques en ont identifié des milliers d'autres, révélant une diversité de mondes au-delà de notre imagination. Grâce à des techniques avancées – telles que la méthode des transits, la méthode des vitesses radiales ou encore l'imagerie directe –, les astronomes peuvent détecter et étudier ces lointaines planètes pour chercher à comprendre leur composition, leur atmosphère et leur potentiel d'habitabilité.

Dans ce sujet, on étudie la possibilité d'obtenir une image détaillée d'une exoplanète située à une distance de 100 années-lumière du Soleil. Développer tout le formalisme nécessaire à la reconstruction d'une image complexe sort du cadre de ce sujet et on se ramène à une situation simplifiée : on considère deux points à la surface de l'exoplanète et on cherche à les distinguer ou à mesurer la distance qui les sépare.

En 2022, la collaboration Event Horizon Telescope a réussi à construire une image dans le domaine des ondes radios du trou noir situé au centre de notre galaxie à l'aide du phénomène d'interférences. Dans cette partie, on détermine s'il est possible d'appliquer cette méthode pour obtenir l'image d'une exoplanète à partir d'une situation modèle simplifiée (la construction véritable d'une image à partir d'un ensemble de figures d'interférences n'est pas traitée).

I Principe de la mesure sur un système équivalent

On illustre ici le principe de la mesure en analysant une expérience mettant en jeu les fentes d'Young. Le montage expérimental est représenté sur la figure 1. Il est constitué des éléments suivants :

- deux sources ponctuelles S_A et S_B , incohérentes, séparées d'une distance d , qui émettent des ondes lumineuses monochromatiques de même amplitude à la longueur d'onde λ_0 ;
- une lentille convergente $\mathcal{L}_1$, de centre O_1 , de distance focale f'_1 ;
- des fentes T_1 et T_2 de largeur notée ℓ , perpendiculaires au plan de la figure, dont les centres sont éloignés d'une distance a .
- une lentille convergente notée $\mathcal{L}_2$, de distance focale f'_2 ;
- un écran, situé dans le plan focal image de la lentille $\mathcal{L}_2$.

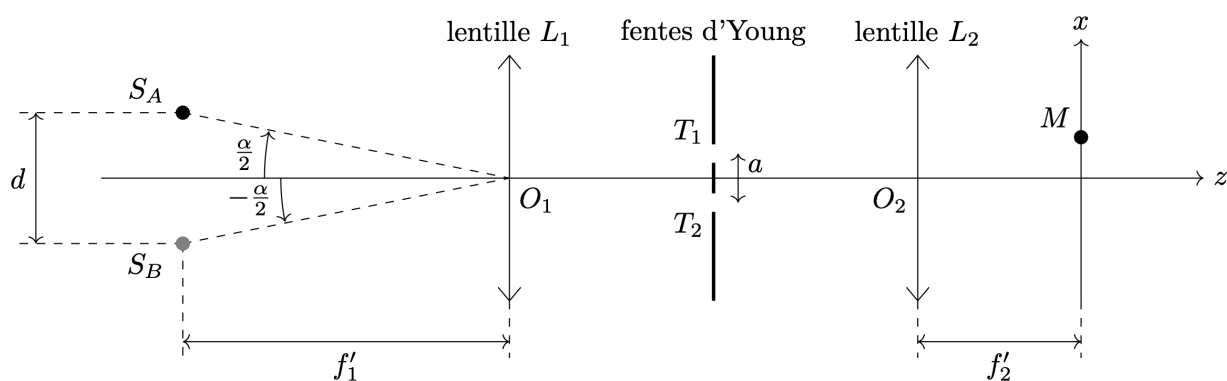


Figure 1

Les sources S_A et S_B sont situées dans le plan focal objet de la lentille $\mathcal{L}_1$. On note α l'angle positif $(S_B O_1 S_A)$. Soit M un point d'abscisse x situé sur l'écran (voir figure 1). On admet que l'ordonnée y ne joue ici aucun rôle et on suppose que tous les angles d'incidence sont petits.

Pour commencer, on considère que seule la source S_A émet de la lumière (on ne prend pas en compte la source S_B). On note δ_{tot} la différence de marche au point M entre les rayons passant par chaque fente d'Young :

$$\delta_{\text{tot}} = (S_A T_2 M) - (S_A T_1 M).$$

On la décompose en deux parties :

$$\delta_{\text{tot}} = \delta_{\text{source}} + \delta$$

où δ_{source} est la différence de marche introduite en amont des trous d'Young et δ celle introduite en aval :

$$\delta_{\text{source}} = (S_A T_2) - (S_A T_1) \quad \text{et} \quad \delta = (T_2 M) - (T_1 M).$$

□ – 1. Établir l'expression de δ_{source} en fonction de a et $\alpha \ll 1$.

On suppose que S_A émet un signal de la forme $s(t) = s_0 \cos(\omega t)$, où s_0 est une constante réelle positive et ω la pulsation de l'onde lumineuse.

□ – 2. Exprimer le signal $s_1(t)$ reçu au point M pour l'onde qui est passée par T_1 , ainsi que le signal $s_2(t)$ reçu au point M pour l'onde qui est passée par T_2 , en fonction de s_0 , ω , t , $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, $(S_A T_1 M)$ et $(S_A T_2 M)$. On négligera la décroissance d'amplitude de l'onde liée à la propagation.

On appelle $I(M)$ l'intensité du signal mesuré au point M (notée également $I(\delta)$).

□ – 3. Donner l'expression de I à l'aide de s_1 et s_2 et éventuellement d'autres grandeurs. Dédurre de celle-ci la relation

$$I(\delta) = 2I_0 \left(1 + \cos \left[k \left(a \frac{\alpha}{2} + \delta \right) \right] \right).$$

On tient désormais compte de la présence de la source S_B , en plus de celle de la source S_A .

□ – 4. Indiquer, avec justification, si les signaux issus de S_A interfèrent avec ceux issus de S_B . Montrer que l'intensité détectée au point M se met sous la forme

$$I_d(\delta) = I_{d,0} (1 + \Gamma(a, \alpha) \cos(k\delta))$$

où la fonction Γ , appelée facteur de cohérence, est donnée par :

$$\Gamma(a, \alpha) = \cos \left(\alpha \frac{ka}{2} \right).$$

□ – 5. Tracer l'allure de $I_d(\delta)$ en fonction de δ dans le cas où le facteur de cohérence vaut 1, puis dans le cas où le facteur de cohérence est nul.

L'expérience étudiée a été conduite en utilisant l'écran d'un smartphone pour réaliser les deux sources. Le montage expérimental est représenté sur la figure 2. La lentille $\mathcal{L}_2$ et l'écran sont respectivement l'objectif et le capteur CCD d'un appareil photographique numérique réglé à l'infini.

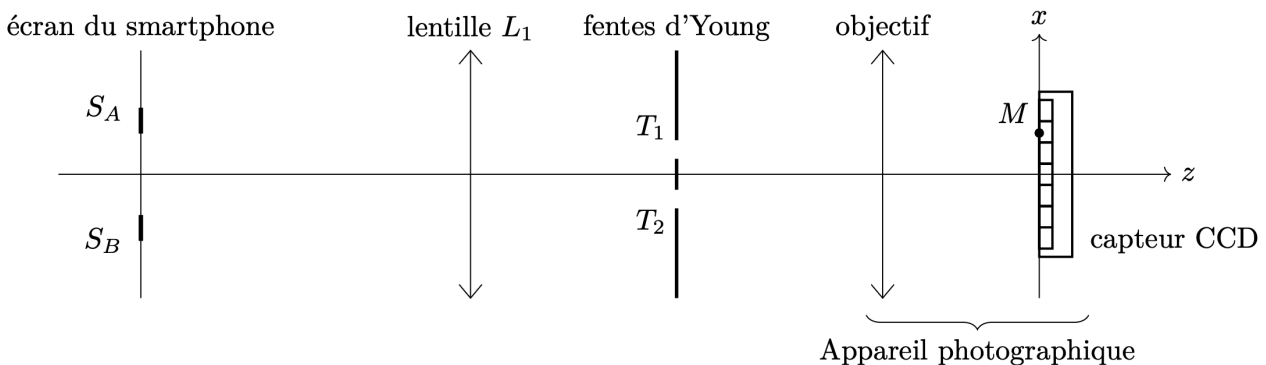


Figure 2

La figure 3 précise la nature de l'image utilisée sur l'écran du smartphone : ce qui apparaît en blanc sur la figure correspond à du noir sur l'image réelle, tandis que les traits épais noirs correspondent à deux traits lumineux qui jouent le rôle de sources de lumière de longueur d'onde λ_0 .

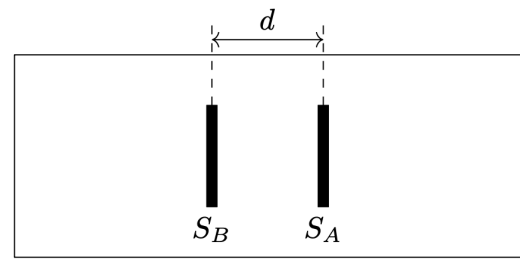


Figure 3 - Schéma de l'image utilisée sur l'écran du smartphone (pas à l'échelle).

En analysant les résultats de l'expérience, il est possible de déterminer l'angle α . La figure 4 montre une partie de l'image donnée par le capteur, ainsi que le profil d'intensité lumineuse correspondant, tracé en fonction de $\frac{\delta}{\lambda_0}$, où δ est la différence de marche introduite précédemment. Les paramètres sont les suivants : $a = 200 \mu\text{m}$, $\lambda_0 = 650 \text{ nm}$, $f'_1 = 80 \text{ cm}$, $f'_2 = 5,6 \text{ cm}$.

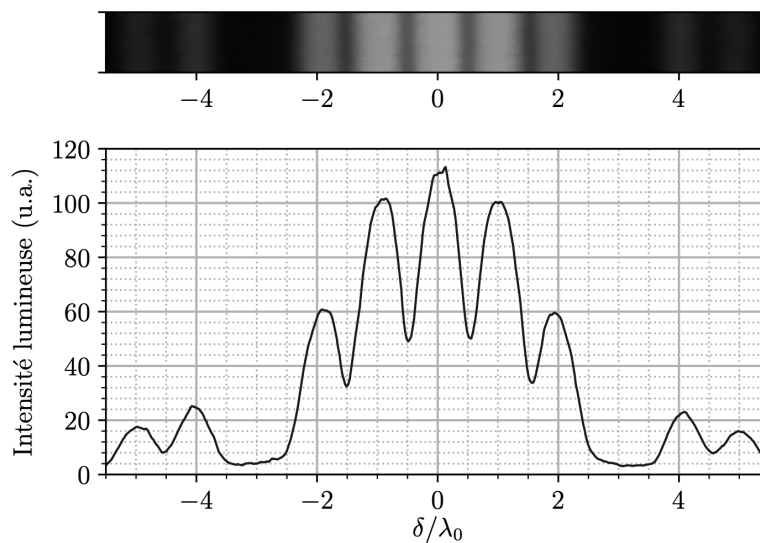


Figure 4 : Image du dessus : photographie de la figure d'interférences obtenue avec les fentes d'Young.

Figure de dessous : profil d'intensité lumineuse pour la figure d'interférences.

L'axe des abscisses est le même pour les deux figures.

- ❑ – 6. Calculer numériquement $\frac{ka}{2}$ pour cette expérience.

La lumière émise par la source n'est pas monochromatique : on peut considérer que l'incertitude-type sur λ_0 est $u(\lambda_0) = 30 \text{ nm}$.

- ❑ – 7. En déduire l'incertitude-type sur $\frac{ka}{2}$.

On définit le contraste par :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

où $I_{\max}$ est l'intensité lumineuse maximale au centre de la figure d'interférences et $I_{\min}$ l'intensité lumineuse sur les deux minimums qui encadrent la zone centrale d'intensité maximale.

- ❑ – 8. Déterminer la valeur numérique du contraste pour cette figure d'interférences.

En changeant a et λ_0 , il est possible de mesurer le contraste pour d'autres valeurs de $\frac{ka}{2}$. La figure sur le document réponse montre ses variations en fonction de $\frac{ka}{2}$.

- – 9. Ajouter votre point de mesure avec son incertitude-type sur le document réponse. L'incertitude-type sur le contraste sera prise égale à 10% de sa valeur.

Le contraste C est relié au facteur de cohérence Γ (introduit à la question 4.) par $C = |\Gamma|$. Selon le modèle développé précédemment, on s'attend à observer pour C un comportement régi par la relation :

$$C = \left| \cos \left(\alpha \frac{ka}{2} \right) \right|.$$

On considère donc la fonction

$$\frac{ka}{2} \mapsto C_0 \left| \cos \left(\alpha \frac{ka}{2} \right) \right|$$

et on cherche les valeurs des paramètres C_0 et α qui minimisent l'écart entre les points expérimentaux et les valeurs prises par cette fonction aux mêmes abscisses, un peu comme on le ferait pour une régression linéaire. Par ce procédé d'ajustement, on obtient les valeurs avec incertitudes-types suivantes :

$$\begin{aligned} C_0 &= 0,421 & ; & \quad u(C_0) = 0,010 \\ \alpha &= 6,36 \cdot 10^{-4} \text{ rad} & ; & \quad u(\alpha) = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ rad.} \end{aligned}$$

- – 10. Expliquer en quelques lignes comment on peut obtenir les incertitudes-types sur les paramètres C_0 et α en exploitant les incertitudes-types sur les données expérimentales.
- – 11. En déduire la valeur numérique de d avec son incertitude-type $u(d)$.

On peut procéder à une mesure plus directe de la distance entre les deux sources. Pour cela, on part du montage étudié ci-dessus, puis on enlève les fentes d'Young. La figure 5 montre une partie de l'image qui est alors enregistrée par le capteur, ainsi que le profil d'intensité lumineuse correspondant, tracé en fonction de x .

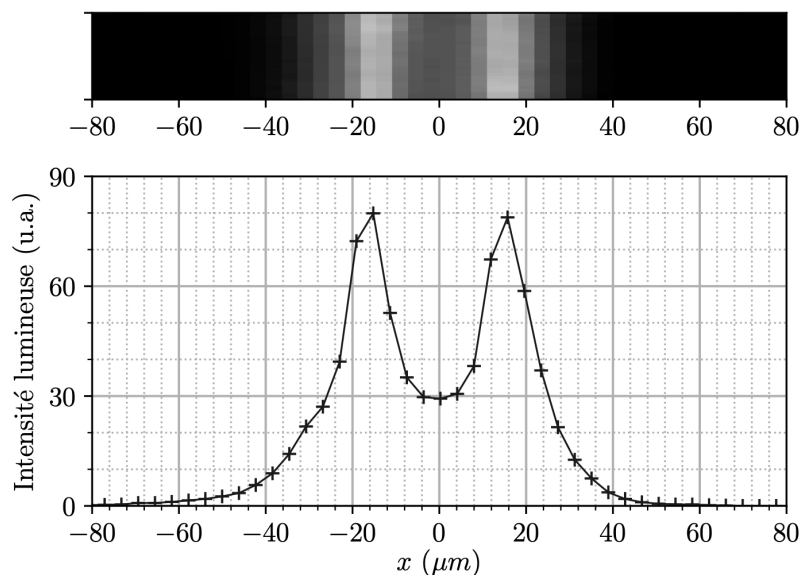


Figure 5 : Image du dessus : photographie de la figure d'interférences obtenue lorsqu'on enlève les fentes d'Young.

Figure de dessous : profil d'intensité lumineuse de la photographie.

L'axe des abscisses est le même pour les deux figures.

- – 12. Déterminer une autre valeur numérique de d à partir de cette expérience, en proposant une estimation d'incertitude associée. Comparer à la valeur obtenue à la question 11. Discuter à l'aide d'un critère quantitatif l'accord des deux résultats.

On a montré qu'il est possible de déterminer une caractéristique des sources lumineuses (leur distance) en étudiant une figure d'interférences. La reconstruction d'une image plus complexe se fait également en mesurant et en exploitant la fonction de contraste.

II Interférences à deux télescopes

On transpose la situation modèle abordée dans la section précédente à l'expérience telle qu'elle peut être réalisée en astronomie. On considère deux télescopes séparés d'une distance a et pointés vers la même direction. Une source ponctuelle A_0 se trouve à l'infini, dans une direction faisant un angle $\frac{\alpha}{2}$ avec l'axe des télescopes (figure 6, représentée avec un angle positif). On suppose $|\alpha| \ll 1$. On note λ_0 la longueur d'onde considérée dans l'onde émise par la source ponctuelle.

Des rayons lumineux issus de la source sont captés par chaque télescope. Ils sont ensuite guidés par des fibres optiques jusqu'à un unique détecteur sur lequel ils sont combinés et interfèrent. Sur la fibre optique issue du télescope 2, un dispositif permettant d'ajouter une différence de marche variable, appelée *ligne à retard*, est installé.

Le chemin optique entre l'entrée du télescope 1 (notée T_1 sur la figure 6) et le détecteur est égal à L .

Le chemin optique entre l'entrée du télescope 2 (notée T_2 sur la figure 6) et le détecteur est égal à $L + \delta_r$, où δ_r est variable.

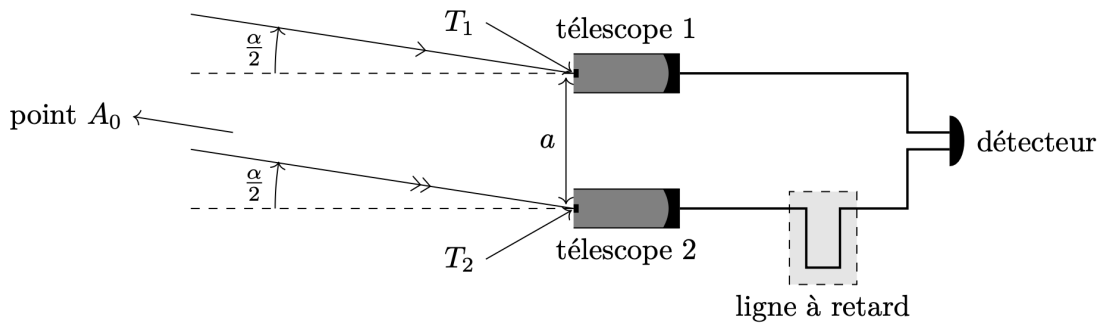


Figure 6

- – 13. Établir l'expression de la différence de marche totale entre un rayon passant dans le télescope 2 et un rayon passant dans le télescope 1 en fonction de α , a et δ_r . Comparer au résultat de la question 1. et commenter.

En suivant une démarche similaire à celle conduite précédemment, on peut montrer que la résolution angulaire α_{res} de ces deux télescopes, c'est-à-dire ici l'angle minimal qui doit séparer deux points proches pour qu'ils soient correctement discernés, est telle que :

$$\alpha_{\text{res}} k a = \pi$$

où $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Dans le cadre du projet LIFE (Large Interferometer For Exoplanets), des scientifiques espèrent envoyer dans l'espace des télescopes dans le but d'observer des exoplanètes en utilisant la technique d'interférométrie dans le domaine de l'infrarouge (on choisit ici $\lambda_0 = 5 \mu\text{m}$). La distance entre les télescopes pourra atteindre 1 km.

- – 14. Déterminer la résolution angulaire que l'on peut ainsi obtenir avec ces télescopes. En déduire la résolution spatiale (en kilomètres) que l'on peut espérer atteindre pour une exoplanète située à une distance de 100 années-lumière. Commenter

Données numériques

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Année-lumière (al)	$1,00 \text{ al} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$
Unité astronomique (au)	$1,00 \text{ au} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Remarque : l'unité astronomique (symbole au) est une unité couramment utilisée en astronomie qui correspond approximativement à la distance entre la Terre et le Soleil.

Formulaire

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

Troisième partie

Mesure de la variation temporelle de g

Notations et données numériques utiles dans l'épreuve :

- constante de gravitation universelle : $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$
- masse de la Terre : $m_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$
- masse de la Lune : $m_L = 7,3 \times 10^{22} \text{ kg}$
- masse du Soleil : $m_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$
- rayon de la Terre : $R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$
- distance Terre-Soleil : $d_S = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$
- distance Terre-Lune : $d_L = 3,8 \times 10^8 \text{ m}$

De nombreux domaines technologiques nécessitent de connaître de manière précise la valeur du champ de pesanteur $\vec{g}$ (tel que le poids $\vec{P}$ d'un corps de masse m s'écrive $\vec{P} = m\vec{g}$). Ce sujet s'intéresse à un modèle permettant d'expliquer la dépendance temporelle du champ de pesanteur mesurée par un appareil de précision. Dans tout le problème on notera $g = \|\vec{g}\|$ l'intensité de la pesanteur.

On s'intéresse au champ de gravitation en un point M de masse m fixé à la surface de la Terre (et donc immobile par rapport à celle-ci). On note $\vec{g} = g\vec{u}$ le champ de pesanteur en M où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la verticale locale orientée vers le bas. On observe expérimentalement que g dépend faiblement du temps. On introduit alors $\bar{g}$, la moyenne temporelle de g sur une période d'étude et $\delta g = g - \bar{g}$. La courbe de la figure 1 représente les variations de δg en fonction du temps. La valeur moyenne de g à l'endroit considéré et sur la période considérée est $\bar{g} = 9\,808\,907\,500 \text{ nm} \cdot \text{s}^{-2}$, l'axe des abscisses est gradué en jour julien moyen¹. La durée d'observation est d'environ 25 jours.

Le but de cette partie est de comprendre l'origine de cette variation temporelle et d'en donner une expression approchée. Pour cela, on s'intéresse aux forces gravitationnelles exercées sur le point M de masse m . On considère ici que chaque astre (Terre, Soleil, Lune, etc.) exerçant une influence gravitationnelle est à symétrie sphérique. Pour un astre (A), on notera A , R_A et m_A respectivement son centre, son rayon et sa masse (en particulier, la Terre T sera décrite par une sphère de centre T , de rayon R_T et de masse m_T). On note également $d_A = \|\vec{TA}\|$ la distance entre les centres A et T de l'astre (A) et de la Terre.

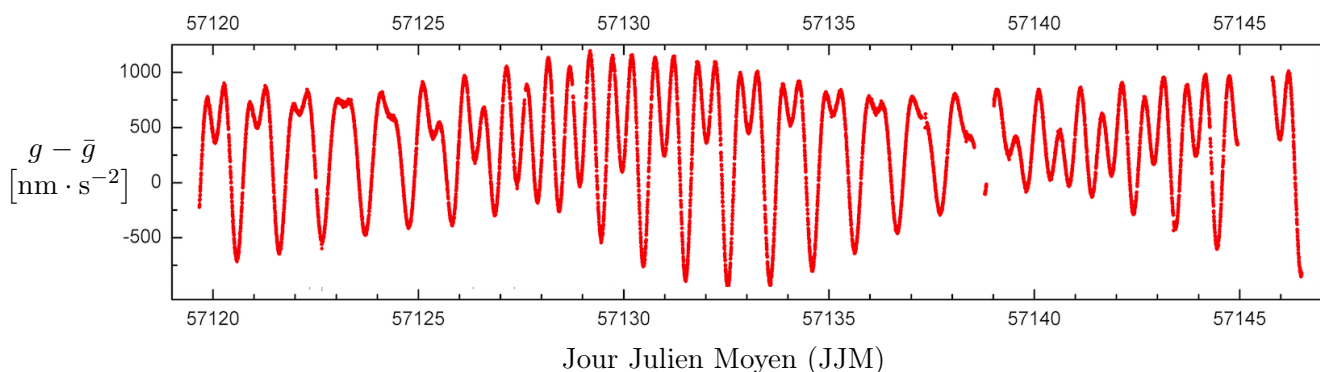


FIGURE 1 – Variation temporelle de l'intensité de la pesanteur.

1. Le jour julien est un système de datation consistant à compter le nombre de jours et fraction de jour écoulés depuis une date conventionnelle fixée au 1er janvier de l'an 4713 av. J.-C.

- – 1. Évaluer graphiquement les trois temps caractéristiques $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ qui apparaissent sur la courbe de la figure 1.

Que peut-on conjecturer sur les origines respectives des variations de g sur chacune de ces échelles de temps ?

- – 2. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen, du référentiel de Copernic $\mathcal{R}_0$ et du référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$.
- – 3. On considère que le référentiel $\mathcal{R}_0$ est galiléen. Montrer que $\mathcal{R}_g$ ne l'est pas.

La force gravitationnelle $\vec{F}_{A \rightarrow m}$ exercée par un astre (A) sur un corps ponctuel de masse m placé en M et le champ gravitationnel $\vec{G}_A(M)$ créé par l'astre (A) en M vérifient la relation $\vec{F}_{A \rightarrow m} = m\vec{G}_A(M)$.

- – 4. Énoncer le théorème de Gauss gravitationnel, reliant notamment le champ de gravitation $\vec{G}$ et la constante de gravitation universelle G .

En déduire l'expression du champ $\vec{G}_A(M)$ créé par un astre (A) pour $AM > R_A$, en fonction de G , m_A et $\vec{AM}$.

On introduit une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fixe dans $\mathcal{R}_g$ telle que le plan $\mathcal{P}_e = (T, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ coïncide avec le plan équatorial terrestre. On considère que la Terre est en rotation uniforme autour de l'axe $(T, \vec{e}_z)$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_g$ et on note $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ son vecteur rotation. On considère un point M de masse m situé à la surface de la Terre et un astre quelconque (A). Le vecteur unitaire radial de la base sphérique locale en M est $\vec{e}_r = \vec{TM}/R_T$. On note finalement $\Psi_A = \widehat{(\vec{TM}, \vec{TA})}$ l'angle vu depuis le centre de la Terre entre le point M et le centre de l'astre (A). Ces notations sont explicitées sur la figure 2 dans laquelle les échelles, notamment de distance, ne sont pas respectées.

Dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$, les trajectoires du point M appartenant à la surface de la Terre, ainsi que celles des centres L et S de la Lune et du Soleil peuvent être considérées comme circulaires uniformes, de périodes respectives T_M , T_L et T_S .

- – 5. Donner la valeur approximative, en jours terrestres, de chacune de ces périodes.

Déterminer la valeur numérique de ω en radian par seconde.

On suppose que l'influence gravitationnelle d'un astre (A) est non négligeable. Pour un point M de masse m posé à la surface de la Terre, immobile par rapport à la Terre et soumis à des forces de contact de résultante $\vec{R}$, l'intensité de la pesanteur est définie par :

$$\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$$

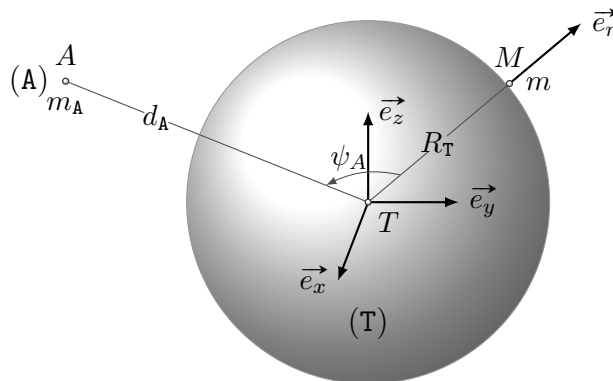


FIGURE 2 – Caractérisation géométrique du problème.

- – 6. En étudiant le mouvement de M dans le référentiel $\mathcal{R}_g$, montrer que l'on peut exprimer $\vec{g}$ sous la forme $\vec{g} = \vec{\mathcal{G}}_{\text{T}}(M) + \vec{\gamma}_0 + \vec{\gamma}_1$ où $\vec{\gamma}_0$ s'exprime en fonction de $\vec{\omega}$ et de $\overrightarrow{TM}$ alors que $\vec{\gamma}_1$ est simplement la différence entre $\vec{\mathcal{G}}_{\text{A}}(M)$ et $\vec{\mathcal{G}}_{\text{A}}(T)$.
- – 7. Comment intervient le terme $\vec{\gamma}_0$ dans la variation du champ de pesanteur locale ?

En considérant uniquement l'effet d'un astre (A), on note δg_{A} l'expression théorique de la quantité δg discutée dans le préambule de cette partie I.

- – 8. Déterminer l'expression de δg_{A} en fonction de $\vec{e}_r$ et de l'un des trois termes $\vec{\mathcal{G}}_{\text{T}}(M)$, $\vec{\gamma}_0$ ou $\vec{\gamma}_1$.

En pratique, l'astre perturbateur (A) considéré est toujours très loin de la Terre. Ainsi, $d_{\text{A}} \gg R_{\text{T}}$ et l'on peut chercher à donner une expression approchée de $\vec{\gamma}_1$ en se limitant uniquement aux termes d'ordre 1 en $R_{\text{T}}/d_{\text{A}}$.

- – 9. Montrer que, dans cette approximation, $\vec{\gamma}_1$ s'exprime sous la forme :

$$\vec{\gamma}_1 = -\frac{Gm_{\text{A}}}{d_{\text{A}}^3} \left(\overrightarrow{TM} + \mu \overrightarrow{TA} \right)$$

où l'on précisera l'expression de μ en fonction de $\overrightarrow{TM}$, $\overrightarrow{TA}$, d_{A} , R_{T} et Ψ_{A} .

En déduire l'expression de δg_{A} en fonction de G , m_{A} , d_{A} , R_{T} et Ψ_{A} .

- – 10. Déterminer l'expression de $|\delta g_{\text{A}}|$ dans le cas particulier où $\overrightarrow{TM}$ et $\overrightarrow{TA}$ sont colinéaires et de même sens.

Calculer alors, dans ce cas, les valeurs de $|\delta g_{\text{L}}|$ et $|\delta g_{\text{S}}|$, variations de g dues respectivement à la Lune et au Soleil ainsi que de leur rapport $\kappa = |\delta g_{\text{L}}| / |\delta g_{\text{S}}|$. Commenter les valeurs obtenues.

On se place dans un modèle dans lequel on admet que pour tous les astres (A) autres que le Soleil et la Lune on a $|\delta g_{\text{A}}| \ll |\delta g_{\text{S}}|$.

- – 11. En prenant en compte les résultats des questions précédentes, écrire l'expression la plus simple possible de $|\delta g|$ correspondant au modèle étudié en fonction notamment du temps t . Après avoir tracé l'allure de la fonction $t \mapsto |\delta g|(t)$ sur un mois, comparer ce résultat aux données expérimentales de la figure 1.

Document réponse

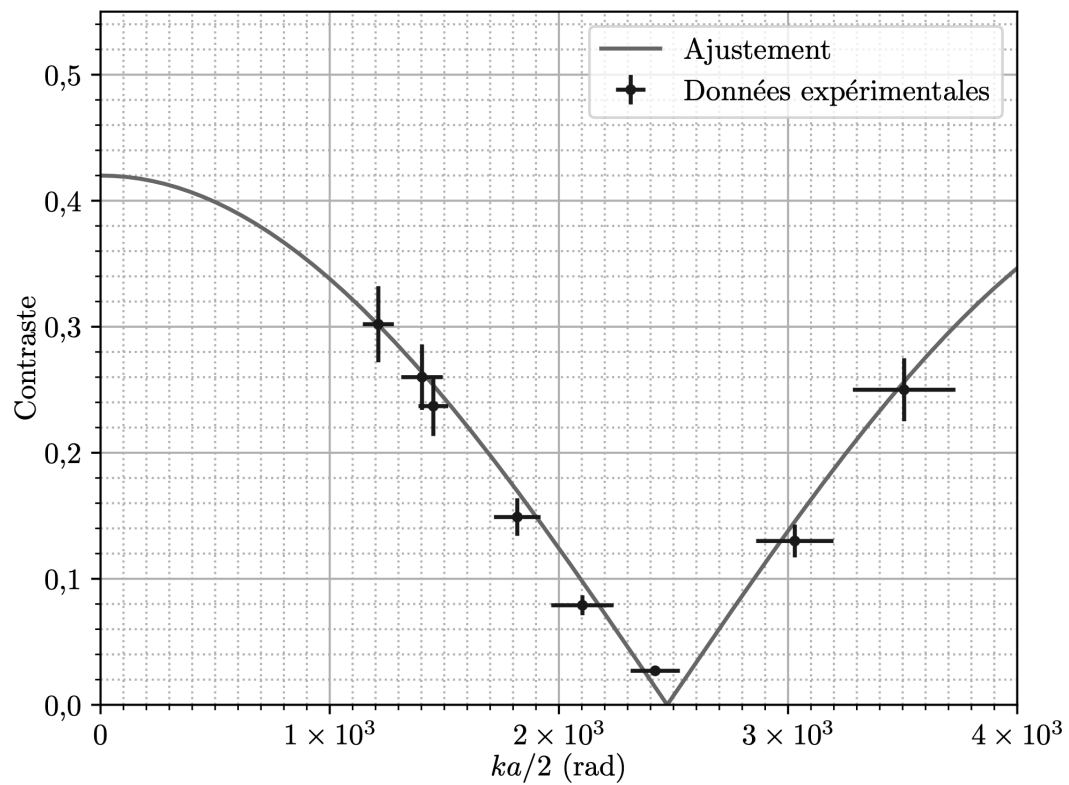


Figure - Évolution du contraste en fonction de $ka/2$ pour l'expérience des fentes d'Young, où k est le vecteur d'onde et a la distance entre les deux fentes.