

# Étude d'un disque optique numérique

## I - Étude de la piste.

1] Pour un mouvement circulaire de rayon  $r$  à la vitesse angulaire  $\Omega(r)$  on a

$$\Omega_0 = \Omega(r_0) \cdot r \quad \Leftrightarrow \quad \Omega(r) = \frac{\Omega_0}{r}$$

2]  $\Omega$  est maximale pour  $r$  minimal, c'est à dire

$$r = R_1.$$

$$\Omega_{\max} = \frac{\Omega_0}{R_1}$$

$$3] \quad \Omega_{\max} = \frac{1,22}{0,025} \quad \Omega_{\max} = 49 \text{ rad/s}^{-1}$$

$$4] \quad \Omega_{0,\max} = \frac{52 \cdot \Omega_0}{2\pi R_1} \quad \Omega_{0,\max} = 406 \text{ tr/s}$$

1 tour correspond à  $2\pi$  rad.

## II - Mécanique en référentiel non galiléen

1] Un référentiel galiléen est tel que tout point matériel isolé a un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à ce référentiel.

2] Par définition  $\vec{F}_{\text{cent}} = -m\vec{a}_{\text{cent}}$

avec  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$       ou       $\vec{F}_{\text{cent}} = +m\Omega^2 r \vec{e}_r$   
 $\vec{\Omega} = r\Omega \vec{e}_\theta$   
 $\vec{a}_{\text{cent}} = -r\Omega^2 \vec{e}_r$

$$\vec{F}_{\text{cent}} = +m r \Omega^2 \vec{e}_r$$

3] Par définition  $\vec{F}_{\text{ext}} = -2m\vec{r} \times \vec{\Omega}_{\text{rel}}$

avec  $\vec{r} = r \vec{e}_z$ ,  $\vec{\Omega}_{\text{rel}} = \vec{r} \vec{e}_r + r\vec{\theta} \vec{e}_\theta$ ,

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -2m r \vec{e}_z \times (r \vec{e}_r + r\vec{\theta} \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = +2m r \left[ -r \vec{e}_\theta + r\vec{\theta} \vec{e}_r \right]$$

4]  $M$  est immobile sur le CD  $\Rightarrow \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$

## Bilan des forces

• le poids

• la réaction du support

• les forces d'inertie

$$\text{do } R_1 \quad \vec{0} = \vec{R}_T + \vec{R}_N + \vec{p} + \vec{F}_{\text{cent}}$$

Salon  $\vec{r}$        $\vec{0} = \vec{R}_{T_r} + m r \vec{r}^2$

Salon  $\vec{e}_\theta$        $\vec{0} = \vec{R}_{T_\theta}$

Salon  $\vec{e}_\theta$        $\vec{0} = -m\vec{g} + \vec{R}_N$

$$\vec{R}_{T_\theta} = -m r \Omega^2 \vec{e}_r$$

et       $m r \Omega^2 \leq f mg$

$$n \leq \underbrace{\frac{f g}{r \Omega^2}}_{\vec{r}_e}$$

$$n \leq f \frac{g}{\Omega^2}$$

5.  $f = 0$ .  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$   
 Le mouvement est radial :  $\vec{v} = r \vec{e}_r$   
 $\vec{a} = r \vec{e}_r$

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{R}_{\text{renière}}$$

Selon  $\vec{e}_r$  :  $m \ddot{r} = m r \ddot{\theta}^2$

$\ddot{r} - r \ddot{\theta}^2 = 0$

Equation du mouvement

6.  $r = \pm \theta$        $x(t) = A e^{\pm i \theta t}$

$r(0) = A + B = 0$   
 $\dot{r}(0) = \pm \theta (A - B) = 0$        $A = B = \frac{r_0}{2}$

$r(t) = r_0 \cosh \pm \theta t$

$\vec{R}_N = +m g \vec{e}_z$

$\vec{R}_{\text{ext}} = 2m \theta^2 r \vec{e}_z$   
 $\vec{R}_{\text{ext}} = 2m \theta^2 r_0 \sin \theta t \vec{e}_z$

$\vec{R} = m [2 \theta^2 r_0 \sin \theta t \vec{e}_z + g \vec{e}_z]$

III. Résistance mécanique des disques

1.  $dm = r_1 d\theta_1 h N d\sigma_1$

2.  $d\vec{F}_{\text{ext}} = dm \mu_1 \Omega^2 \vec{e}_n$

3.  $d\vec{F}_a + d\vec{F}_b$  est selon  $\vec{e}_n$  par symétrie

$$d\vec{F}_a = \|d\vec{F}_b\| \left[ \frac{d\theta_1}{2} \vec{e}_y, -\sin \frac{d\theta_1}{2} \vec{e}_n \right)$$

$$d\vec{F}_b = \|d\vec{F}_b\| \left( -\cos \frac{d\theta_1}{2} \vec{e}_y, -\sin \frac{d\theta_1}{2} \vec{e}_n \right)$$

avec  $\sin \frac{d\theta_1}{2} = \frac{d\theta_1}{2}$

$$\rightarrow d\vec{F}_a + d\vec{F}_b = -\Omega dS \frac{d\theta_1}{2} \vec{e}_n$$

4.  $dm$  est à l'équilibre dans  $R_1$

$$\vec{0} = d\vec{F}_a + d\vec{F}_b + d\vec{F}_{\text{ext}}$$

D'où  $\Omega dS \frac{d\theta_1}{2} = dm \mu_1 \Omega^2$

$$\Omega = \frac{dm \mu_1 \Omega^2}{dS d\theta_1} \quad \text{avec } dS = h d\sigma_1$$

$\Omega = \frac{dm \mu_1 \Omega^2}{h d\sigma_1 d\theta_1}$       or  $dm = r_1 d\theta_1 h \mu_1$

$\Omega = \mu_1 r_1^2 \Omega^2$

5.  $\Omega$  est maximale pour  $n = R_{\text{ext}}$

6.  $\Omega_{\text{max}} = 65,0 \text{ rad/s}$

$$\Omega_{\text{max}} = \sqrt{\frac{R_{\text{ext}} - R_{\text{max}}}{R_{\text{ext}}}}$$

$R_{\text{max}} = \sqrt{\frac{\Omega_{\text{max}}^2 \times 1}{\mu_1}}$

$$\Omega_{\text{max}} = \frac{3,9 \cdot 10^3 \text{ rad/s}^{-1}}{37 \cdot 10^3 \text{ N.m.s}^{-1}}$$

## Première partie

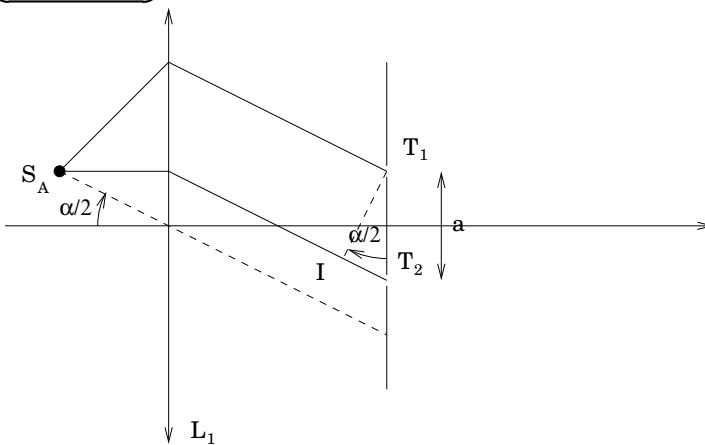
# Faire l'image d'une exoplanète

### I Principe de la mesure sur un système équivalent

- Le point source  $S_A$  étant dans le plan focal objet de la lentille 1, le faisceau émergent de la lentille est un faisceau parallèle dans la direction  $(S_A O_1)$ . Les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires au rayons après  $L_1$ . On construit les rayons issus de  $S_A$  passant par  $T_1$  ou  $T_2$ . On utilise le théorème de Malus :  $(S_A T_1) = (S_A I)$ , ce qui permet d'obtenir

$$\delta_{source} = (S_A T_2) - (S_A T_1) = (S_A I) + (I T_2) - (S_A T_1) = (I T_2) = a \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

soit  $\delta_{source} = \frac{a\alpha}{2}$  (cf. figure suivante)



Note : le sens positif des angles est horaire.

- On a  $s_1(t) = s_0 \cos(\omega t - k(S_1 T_1 M))$  et  $s_2(t) = s_0 \cos(\omega t - k(S_2 T_2 M))$ .
- On a  $I(M) = k \langle s(M, t) \rangle$ , où  $k$  est un coefficient de proportionnalité positif et  $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$ .

On a donc  $I(M) = k \langle s_1^2 \rangle + 2k \langle s_1 s_2 \rangle + k \langle s_2^2 \rangle$ .

On a, par ailleurs  $I_0 = k \frac{s_0^2}{2}$ , ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} I(\delta) &= 2I_0 + 4I_0 \langle \cos(\omega t - k(S_1 T_1 M)) \cos(\omega t - k(S_1 T_2 M)) \rangle \\ &= 2I_0 + 2I_0 \langle \cos(2\omega t - k(S_1 T_1 M) - k(S_1 T_2 M)) + \cos(k(S_1 T_2 M) - k(S_1 T_1 M)) \rangle \\ &= 2I_0 (1 + \cos[k((S_1 T_2 M) - (S_1 T_1 M))]) \end{aligned}$$

On a donc  $I(M) = 2I_0 (1 + \cos[k(\delta_{source} + \delta)])$  ce qui donne le résultat demandé.

- Les deux sources sont incohérentes, il n'y a donc pas d'interférence entre elles. L'intensité totale est donc la somme des intensités dues aux sources  $S_A$  et  $S_B$  ; l'intensité due à  $S_B$  est simplement obtenue en remplaçant  $\alpha$  par  $-\alpha$ .

On obtient alors :

$$\begin{aligned} I_d(\delta) &= 2I_0 \left( 1 + \cos \left[ k \left( \frac{a\alpha}{2} + \delta \right) \right] \right) + 2I_0 \left( 1 + \cos \left[ k \left( \frac{-a\alpha}{2} + \delta \right) \right] \right) \\ &= 4I_0 \left( 1 + \cos(k\delta) \cos\left(\frac{k a \alpha}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché, avec  $I_{d,0} = 4I_0$ .

- On a :

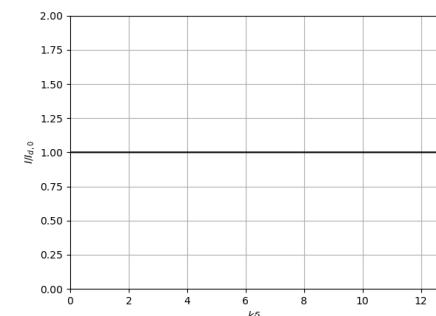
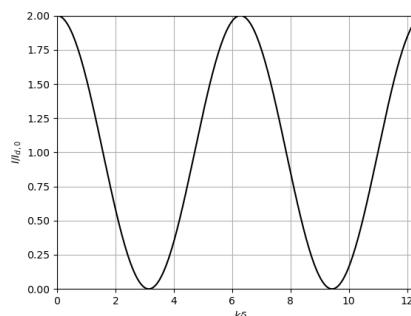


FIGURE 1 – Gauche : Intensité pour un facteur de cohérence égal à 1 ; Droite : intensité pour un facteur de cohérence nul.

- Application numérique :  $\frac{ka}{2} = \frac{\pi a}{\lambda_0} = 967$

7. L'énoncé n'indique pas d'incertitude sur  $a$  on peut donc considérer que celle-ci est nulle. On a alors simplement, en notant  $\beta = \frac{ka}{2} = \frac{\pi a}{\lambda_0}$ , et  $u(x)$  l'incertitude-type sur  $x$ ,

$$\frac{u(\beta)}{\beta} = \frac{u(\lambda_0)}{\lambda_0}.$$

Soit  $u(\beta) = \frac{\beta}{\lambda_0} u(\lambda_0) = 45$ .

8. On peut lire  $I_{max} = 112$  u.a et  $I_{min} = 50$  u.a, et donc  $C = 0,38$ .

NB : La figure ne correspond pas à l'expression de la question 4., car on a un phénomène de diffraction (par les fentes d'Young) qui se superpose aux interférences, et conduit à un  $I_0$  dépendant de  $\delta$ .

9. Cf. figure ??.

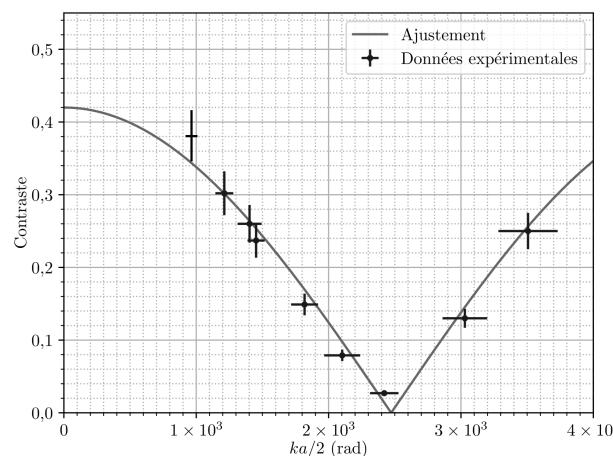


FIGURE 2 – Figure du document réponse, avec le point supplémentaire.

10. Il est possible de le faire via une méthode de Monte-Carlo : répéter l'ajustement avec des points pris au hasard dans la distribution de probabilité associée à chaque point de mesure. On peut alors déterminer l'écart-type sur chaque paramètre de la simulation.

NB : On se serait attendu a priori à  $C_0 = 1$ , mais d'autres effets vont contribuer à diminuer le contraste, en premier lieu la largeur non-nulle des fentes

sources.

11. On a  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2f'_1}$ , soit  $\alpha = \frac{d}{f'_1}$ , et donc

$$d = \alpha f'_1 = 508 \mu\text{m}.$$

Comme l'incertitude sur  $f'_1$  est négligée, on a par ailleurs  $u(d) = f'_1 u(\alpha) = 9 \mu\text{m}$

12. Dans ce cas chaque source donne une image à l'infini, inclinée de  $\pm\alpha/2$ , par la lentille  $L_1$ , puis des images dans le plan focal image, à des positions  $\pm f'_2 \alpha/2$ .

La distance  $d'$  entre les deux images sur le plan focal image vaut donc  $d' = f'_2 \alpha = \frac{f'_2}{f'_1} d$ .

On peut estimer  $d' = 32 \mu\text{m}$ . Pour estimer  $u(d')$ , le plus rigoureux est de dire que les deux maxima sont estimées avec une tolérance de  $2 \mu\text{m}$  (puisque les points de mesure sont tous les  $4 \mu\text{m}$ ), et donc une incertitude-type de  $\frac{2}{\sqrt{3}} \mu\text{m}$ .  $d'$  est une différence entre ces deux mesures, les carrés des incertitudes-type s'ajoutent, ce qui donnerait  $u(d') = \sqrt{\frac{2}{3}} 2 \mu\text{m} = 1,6 \mu\text{m}$ .

On obtient alors  $d = \frac{f'_1}{f'_2} d' = 457 \mu\text{m}$ , et  $u(d) = \frac{f'_1}{f'_2} u(d') = 23 \mu\text{m}$

Pour discuter de la compatibilité des deux résultats, on peut calculer l'écart normalisé :  $E_N = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{u(d_1)^2 + u(d_2)^2}} = 2,1$ .

(où  $d_1$  et  $d_2$  correspondent aux deux évaluations de  $d$ )

La compatibilité des deux résultats est discutable. Le critère habituel est de considérer que les résultats sont compatibles si  $E_N < 2$ , mais, dans la mesure où on est très proche de cette limite, obtenir un tel écart par hasard peut être considéré comme improbable, mais pas impossible...

## II Interférences à deux télescopes

13. On a, en utilisant le théorème de Malus de la même façon qu'à la question 1.,  $(A_0 T_2) - (A_0 T_1) = a \frac{\alpha}{2}$ .

La différence de marche totale vaut donc  $\delta = a \frac{\alpha}{2} + \delta_r$ . La situation est donc très similaire à celle de la question 1, à ceci près que la figure d'interférences ne sera pas obtenue d'un coup, mais en modifiant la compensation de la ligne à retard.

$$14. \alpha_{res} = \frac{\lambda_0}{2a} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ rad}$$

La résolution spatiale  $d$ , à un distance  $l$ , vaut  $d = \alpha_{res} l = 2,36 \cdot 10^6 \text{ km}$ .

Cette distance correspond plus à la taille d'une étoile qu'à celle d'une planète. On ne peut donc pas espérer obtenir une image détaillée de l'exoplanète.

NB : Ce n'est d'ailleurs pas le but de la mission : si la résolution est insuffisante pour imager la planète, elle est en revanche suffisante pour distinguer l'étoile et la planète, ce qui permet de réaliser des analyses spectroscopiques sur la planète et donc d'obtenir des informations sur son atmosphère.

## Deuxième partie

### Mesure de la variation temporelle de $g$

- – 1. On repère trois ordres temps caractéristiques. Le plus court et le plus notable est la demi-journée :

$$\tau_1 = 0,5 \text{ jour}$$

Les deux oscillations ainsi observées chaque jour ne sont pas de même amplitude :

$$\tau_2 = 1 \text{ jour}$$

L'ensemble est modulé sur une durée d'environ :

$$\tau_3 = 15 \text{ jours}$$

(par exemple, elle est maximale à 15 131 JJM et 15 146 JJM).

L'origine des deux premières oscillations est la rotation propre de la Terre sur elle-même, la dernière semble être liée à la révolution de la Lune autour de la Terre.

- – 2. Un référentiel galiléen est **un référentiel où le principe d'inertie est valide** : tout point matériel qui n'est soumis à aucune force (isolé) est au repos ou animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme.

Le référentiel de Copernic  $\mathcal{R}_0$  prend pour origine le centre de masse du système solaire, et les trois vecteurs de base pointent vers des étoiles très lointaines.

Le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$  reprend les trois vecteurs de base présentés ci-dessus mais prend comme origine le centre de la Terre.

- – 3. Si  $\mathcal{R}_0$  est galiléen, il faut et il suffit que  $\mathcal{R}_g$  soit en translation rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}_0$ . En effet, si  $M$  est un point matériel isolé, alors il est en translation rectiligne uniforme dans  $\mathcal{R}_0$ . Pour qu'il le soit dans  $\mathcal{R}_g$ , il faut que  $\mathcal{R}_g$  soit en TRU par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

Or  $\mathcal{R}_g$  est en translation circulaire (approximativement uniforme) par rapport à  $\mathcal{R}_0$  donc  $\mathcal{R}_g$  n'est pas galiléen.

- – 4. Énoncé du théorème de Gauss gravitationnel : le flux du champ gravitationnel à travers une surface ( $\Sigma$ ) fermée et orientée vers l'extérieur est égal à la masse totale  $M_{\text{int}}$  contenue dans le volume intérieur à cette surface multipliée par  $-4\pi G$ . Le théorème de Gauss gravitationnel s'écrit :

$$\oint\oint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM_{\text{int}}$$

L'intégrale se fait sur une surface fermée,  $M_{\text{int}}$  est la masse contenue à l'intérieur de cette dernière.

On considère que l'astre est à symétrie sphérique. On se dote des coordonnées sphériques centrées sur l'astre ( $\mathbf{A}$ ) et de la base  $(A, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ . Commençons par l'étude des symétries et invariances.

- **Invariances.** La distribution de masse est à symétrie sphérique (invariance par toute rotation autour du centre de l'astre  $A$ ) : ainsi le champ gravitationnel ne dépend pas des coordonnées angulaires  $\theta$  et  $\varphi$ .
- **Symétries.** Tout plan contenant  $M$  et  $\vec{e}_r$  est un plan de symétrie de la distribution de masses. Ainsi, comme le champ gravitationnel appartient aux plans de symétrie, il est dans la direction  $\vec{e}_r$ .

$$\vec{G} = G(r)\vec{e}_r$$

On considère comme surface de Gauss une sphère de rayon  $r$  centrée sur  $A$ . Le flux à travers cette surface est :

$$\oint\oint \vec{G} \cdot d\vec{S} = \oint\oint G(r)\vec{e}_r \cdot dS\vec{e}_r = G(r) \oint\oint dS = G(r)4\pi r^2$$

La masse contenue dans la surface de Gauss est  $m_{\mathbf{A}}$  car  $r > R_{\mathbf{A}}$ . D'où, d'après le théorème de Gauss :

$$G(r)4\pi r^2 = -4\pi Gm_{\mathbf{A}}$$

d'où :

$$\vec{G}(r) = -G \frac{m_{\mathbf{A}}}{r^2} \vec{e}_r$$

que l'on peut réécrire ( $r = AM$  et  $\vec{AM} = r\vec{e}_r$ ) :

$$\vec{G}(r) = -G \frac{m_{\mathbf{A}}}{AM^3} \vec{AM}$$

- – 5.  $T_M$  correspond à la durée pour que  $M$  gasse un tour complet autour de l'axe des pôles, c'est le jour sidéral :

$$T_M \approx 1 \text{ jour}$$

$T_L$  correspond à la période de révolution de la Lune autour de la Terre :

$$T_L \approx 28 \text{ jours}$$

$T_S$  correspond à la période de révolution de la Terre autour du Soleil :

$$T_S \approx 365 \text{ jours}$$

$\omega$  est la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles :

$$\omega = \frac{2\pi}{T_M} = \frac{6,3}{2,4 \times 3,6 \times 10^4} = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

- – 6. Soit  $M$  un point immobile à la surface de la Terre. Sur ce point s'applique (dans le référentiel géocentrique non galiléen en translation circulaire par rapport au référentiel de Copernic) :

- la force gravitationnelle exercée par la Terre :

$$\vec{F}_{\mathbf{T} \rightarrow M} = m\vec{G}_{\mathbf{T}}(M)$$

- la force gravitationnelle exercée par l'astre ( $\mathbf{A}$ ) :

$$\vec{F}_{\mathbf{A} \rightarrow M} = m\vec{G}_{\mathbf{A}}(M)$$

- la force d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_{\text{i,ent}} = -m\vec{a}(T/\mathcal{R}_0)$
- la force d'inertie de Coriolis est nulle car le référentiel géocentrique est en translation ;
- la réaction du support exprimée d'après l'énoncé ainsi :

$$\vec{R} = -m\vec{g}$$

L'accélération du centre de la Terre dans le référentiel de Copernic se détermine en appliquant le principe fondamental de la dynamique à la Terre soumise à l'action de l'astre :

$$m_{\mathbf{T}}\vec{a}(T/\mathcal{R}_0) = m_{\mathbf{T}}\vec{G}_{\mathbf{A}}(T)$$

L'application du principe fondamental de la dynamique dans ce référentiel donne :

$$\overrightarrow{F_{T \rightarrow M}} + \overrightarrow{F_{A \rightarrow M}} + \overrightarrow{F_{i, \text{ent}}} + \vec{R} = m \vec{a} (M/\mathcal{R}_T)$$

Dans le référentiel géocentrique, le point  $M$  fixe à la surface terrestre a un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire  $\omega$  le long d'un cercle de rayon  $HM$  avec  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation, c'est-à-dire

$$\vec{a} (M/\mathcal{R}_T) = -\omega^2 \overrightarrow{HM} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{TM}) = -\omega^2 \overrightarrow{TM} + (\overrightarrow{TM} \cdot \vec{\omega}) \vec{\omega}$$

Ainsi :

$$\vec{g} = \overrightarrow{g}_T(M) + \overrightarrow{g}_A(M) - \overrightarrow{g}_A(T) + \omega^2 \overrightarrow{TM} - (\overrightarrow{TM} \cdot \vec{\omega}) \vec{\omega}$$

On a bien exprimé  $\vec{g}$  ainsi :  $\boxed{\vec{g} = \overrightarrow{g}_T(M) + \vec{\gamma}_0 + \vec{\gamma}_1}$  avec :

$$\boxed{\vec{\gamma}_0 = \omega^2 \overrightarrow{TM} - (\overrightarrow{TM} \cdot \vec{\omega}) \vec{\omega}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\gamma}_1 = \overrightarrow{g}_A(M) - \overrightarrow{g}_A(T)}$$

□ – 7. En considérant le vecteur  $\vec{\omega}$  constant dans le temps et  $M$  ne bougeant pas à la surface de la Terre (latitude approximativement constante), le vecteur  $\vec{\gamma}_0$  est une constante, il n'intervient pas dans la variation locale de  $g$  (**il intervient dans  $\vec{g}$** ).

Remarque : Le terme  $\vec{\gamma}_0$  est le terme axifuge, maximal à l'équateur et nul aux pôles. Il contribue comme une correction maximale de l'ordre de  $0,03 \text{ m.s}^{-2}$  et entraîne un léger décalage angulaire entre la verticale locale et la direction du centre de la Terre.

□ – 8.  $g$  est la composante verticale de la pesanteur ainsi :

$$\delta g_A = \vec{g} \cdot \vec{e}_r - \langle \vec{g} \cdot \vec{e}_r \rangle$$

les termes  $\overrightarrow{g}_T(M)$  et  $\vec{\gamma}_0$  étant constants dans le temps :

$$\boxed{\delta g_A = \vec{\gamma}_1 \cdot \vec{e}_r - \langle \vec{\gamma}_1 \cdot \vec{e}_r \rangle}$$

□ – 9. On a :

$$\overrightarrow{g}_T = -G \frac{m_A}{d_A^3} \overrightarrow{AT} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{g}_A = -G \frac{m_A}{AM^3} \overrightarrow{AM}$$

Simplifions l'expression de ce second terme dans le cadre de l'hypothèse de l'énoncé. Tout d'abord :

$$AM^2 = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TM})^2 = AT^2 + TM^2 + 2 \overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{TM}$$

Or  $AT = d_A$ ,  $TM = R_T$  et  $\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{TM} = -\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TM} = -R_T d_A \cos(\psi_A)$  d'où :

$$AM = \sqrt{d_A^2 + R_T^2 - 2R_T d_A \cos(\psi_A)}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{AM^3} = (d_A^2 + R_T^2 - 2R_T d_A \cos(\psi_A))^{-3/2} = \frac{1}{d_A^3} \left(1 + \frac{R_T^2}{d_A^2} - 2 \frac{R_T}{d_A} \cos(\psi_A)\right)^{-3/2}$$

à l'ordre le plus bas en  $R_T/d_A$  :

$$\frac{1}{AM^3} = \frac{1}{d_A^3} \left(1 + 3 \frac{R_T}{d_A} \cos(\psi_A)\right)$$

Ainsi :

$$\vec{\gamma}_1 = G \frac{m_A}{d_A^3} \overrightarrow{AT} - G \frac{m_A}{d_A^3} \overrightarrow{AM} - 3G \frac{m_A R_T \cos(\psi_A)}{d_A^4} \overrightarrow{AT} - 3G \frac{m_A R_T \cos(\psi_A)}{d_A^4} \overrightarrow{TM}$$

$\overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{TM}$ . Le dernier terme est négligeable devant le premier terme. Il reste :

$$\vec{\gamma}_1 = -G \frac{m_A}{d_A^3} \overrightarrow{TM} - 3G \frac{m_A R_T \cos(\psi_A)}{d_A^4} \overrightarrow{AT}$$

On a bien montré que :

$$\boxed{\vec{\gamma}_1 = -\frac{G m_A}{d_A^3} (\overrightarrow{TM} + \mu \overrightarrow{TA})} \quad \text{avec} \quad \boxed{\mu = -\frac{3 R_T}{d_A} \cos(\psi_A)}$$

que l'on peut réécrire ainsi :

$$\boxed{\mu = -\frac{3}{d_A^2} \overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TM}}$$

$\delta g_A$  est la partie variable de  $\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{e}_r$ . Il est contenu dans le deuxième terme (l'angle  $\psi_A$  entre  $\overrightarrow{TM}$  et  $\overrightarrow{TA}$  varie à cause de la rotation propre de la Terre en particulier) :

$$-\frac{3G m_A R_T}{d_A^4} \cos(\psi_A) \overrightarrow{TA} \cdot \vec{e}_r$$

Soit, comme  $\overrightarrow{TA} \cdot \vec{e}_r = d_A \cos(\psi_A)$  :

$$-\frac{3G m_A R_T}{d_A^3} \cos^2(\psi_A)$$

$\delta g_A$  est la partie variable de l'écriture ci-dessus :

$$\delta g_A = -\frac{3Gm_A R_T}{d_A^3} \left( \cos^2(\psi_A) - \frac{1}{2} \right)$$

Soit :

$$\boxed{\delta g_A = -\frac{3Gm_A R_T}{2d_A^3} \cos(2\psi_A)}$$

□ – 10. Dans ce cas,  $\psi_A = 0$  d'où :

$$\boxed{|\delta g_A| = \frac{3Gm_A R_T}{2d_A^3}}$$

Dans le cas de la Lune :

$$\boxed{|\delta g_L| = \frac{3Gm_L R_T}{2d_L^3} = \frac{3 \times 6,7 \times 10^{-11} \times 7,3 \times 10^{22} \times 6,4 \times 10^6}{2 \times (3,8 \times 10^8)^3} = 8,6 \times 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

Dans le cas du Soleil :

$$\boxed{|\delta g_S| = \frac{3Gm_S R_T}{2d_S^3} = \frac{3 \times 6,7 \times 10^{-11} \times 2,0 \times 10^{30} \times 6,4 \times 10^6}{2 \times (1,5 \times 10^{11})^3} = 3,8 \times 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

La rapport des deux est :

$$\boxed{K = \frac{m_L d_S^3}{m_S d_L^3} = 2,2}$$

Les valeurs obtenues sont du même ordre de grandeur, même si l'effet de la Lune est prédominant. La correction de  $g$  par cet effet est mineure (de l'ordre de 0,1 pour un million).

□ – 11. On considère un mouvement circulaire de la Lune autour de la Terre, et de la Terre autour du Soleil. Faisons une approximation forte, on suppose que l'axe de rotation de la Terre est approximativement perpendiculaire au plan de l'écliptique. Dans le référentiel géocentrique :

- l'angle décrivant  $M$  est  $\omega t$  ;
- l'angle décrivant  $S$  est  $\Omega_S t$  (à une constante près), où  $\Omega_S$  est la vitesse de rotation du Soleil dans le référentiel géocentrique, égale à la vitesse de rotation de la Terre dans le référentiel héliocentrique approximativement confondu avec le référentiel de Copernic :

$$\Omega_S = \frac{2\pi}{T_S}$$

— l'angle décrivant  $L$  est  $\Omega_L t$  (à une constante près), où  $\Omega_L$  est la vitesse de rotation de la Lune dans le référentiel géocentrique :

$$\Omega_L = \frac{2\pi}{T_L}$$

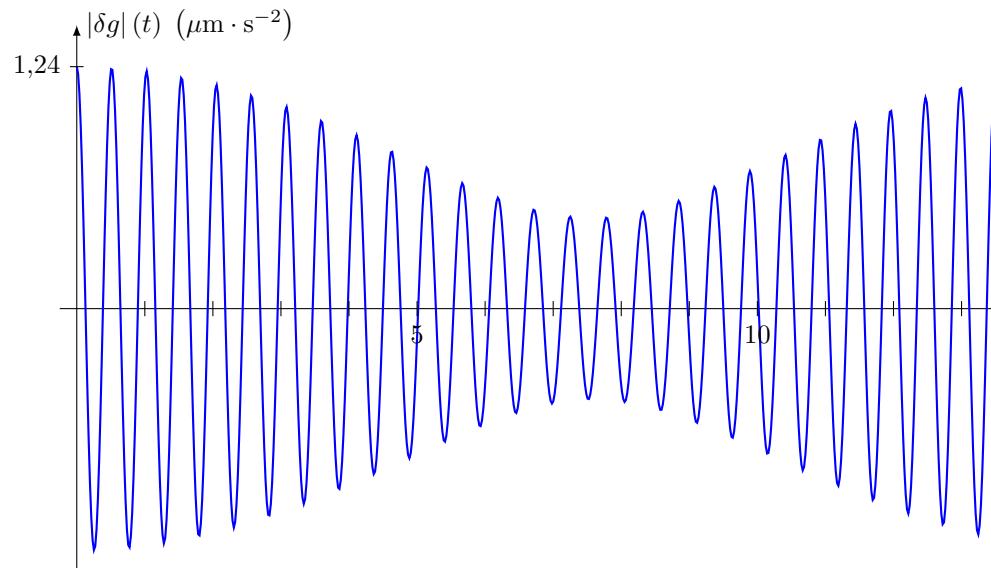
Ainsi :

$$\psi_L = \omega t - \Omega_L t + \psi_{L0} \quad \text{et} \quad \psi_S = \omega t - \Omega_S t + \psi_{S0}$$

D'où :

$$\boxed{|\delta g|(t) = |\delta g_S| \cos(2\omega t - 2\Omega_S t + 2\psi_{S0}) + |\delta g_L| \cos(2\omega t - 2\Omega_L t + 2\psi_{L0})}$$

Le graphique est, en omettant  $2\psi_{S0}$  et  $2\psi_{L0}$  – ce qui revient à faire un bon choix d'origine des temps :



On ne perçoit pas la différence d'amplitude entre les deux oscillations quotidiennes car on n'a pas pris en compte l'inclinaison de l'axe de la rotation terrestre. On retrouve les deux autres périodes. L'ordre de grandeur de  $\delta g$  est le bon.