Cinématique des fluides

Applications directes du cours

$\boxed{1}$ Soit une canalisation à section circulaire de rayon $R = 5$ cm dans laquelle s'écoule de l'eau à la vitesse $v = 1$ m.s^{-1}. Calculer la masse d'eau qui traverse une section de cette canalisation en $\tau = 10$ minutes.

$\boxed{2}$ L'écoulement entre un plan oscillant ($y = 0$) et l'infini ($y \to \infty$) est donné par le champ eulérien des vitesses suivant : $\vec{v}(\vec{r}, t) = A\exp(-ky)\cos(\omega t - ky)\vec{u}_x$. Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement incompressible ?

$\boxed{3}$ Pour chacun des trois champs eulériens de vitesse ci-dessous, où a, b et c sont des constantes positives, répondre aux questions suivantes.
(1) $v_x = ax \qquad v_y = ay$
(2) $v_x = by \qquad v_y = bx$
(3) $v_x = -cy \qquad v_y = cx$

1. Dessiner les lignes de champ et calculer leur équation.
2. L'écoulement est-il incompressible ?
3. L'écoulement est-il potentiel ? Si oui, trouver un potentiel des vitesses associé.
4. Exprimer l'accélération d'une particule de fluide.
5. Représenter l'évolution d'une particule carrée de côtés ℓ ($x \in [0, \ell], y \in [0, \ell]$) entre les instants t et t + dt et caractériser cette évolution en terme de déformation, dilatation, contraction, rotation, ...

$\boxed{4}$ Soit un écoulement de fluide incompressible dans une conduite possédant un rétrécissement. La section de la conduite diminue de S_1 à S_2. La vitesse est supposée uniforme sur une section, v_1 au niveau de S_1 et v_2 au niveau de S_2. Quelle relation lie S_1, S_2, v_1 et v_2 ? Tracer l'allure des lignes de courant. Commenter.

$\boxed{5}$ Écrire les équations locales régissant le champ des vitesses dans un fluide incompressible lors d'un écoulement potentiel.

$\boxed{6}$ On s'intéresse à une tornade :

$$\begin{cases} \vec{v} = r\Omega\vec{u}_\theta & \text{pour r < a} \\ \vec{v} = \dfrac{a^2\Omega}{r}\vec{u}_\theta & \text{pour r > a} \end{cases}$$

Calculer le rotationnel de la vitesse puis calculer la circulation de $\vec{v}$ le long d'un cercle $\mathscr{C}$ d'axe Oz de rayon r orienté dans le sens trigonométrique.

On donne $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{v}) = -\dfrac{\partial\, v_\theta}{\partial\, z}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\dfrac{\partial\, r v_\theta}{\partial\, r}\vec{e_z}$.

$\boxed{2}$ div $(\vec{v}) = 0$, écoulement incompressible. $\boxed{3}$ Écoulement (1) : lignes de courant = demi-droites issues de O ; div $(\vec{v}) = 2a$, compressible ; $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{v}) = \vec{0}$, irrotationnel, $\Phi = \frac{a}{2}(x^2+y^2)$; $\vec{a} = a^2(x\vec{u_x}+y\vec{u_y})$. Écoulement (2) : lignes de courant x^2-y^2 =cte ; div $(\vec{v}) = 0$, incompressible ; $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, v = \vec{0}$, irrotationnel, $\Phi = bxy$; $\vec{a} = b^2(x\vec{u_x}+y\vec{u_y})$. Écoulement (3) : lignes de courant = x^2+y^2 =cste, cercle de centre O ; div $(\vec{v}) = 0$, incompressible ; $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, v = 2c\vec{u_z}$, tourbillonnaire ; $\vec{a} = -c^2(x\vec{u_x}+y\vec{u_y})$. $\boxed{4}$ Conservation du débit volumique : $S_1v_1 = S_2v_2$. $\boxed{5}$ div $(\vec{v}) = 0$, incompressible ; écoulement potentiel, $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi$; $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$, irrotationnel ; $\Delta\Phi = 0$. $\boxed{6}$ Pour $r < a$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{v}) = 2\Omega\vec{u_z}$ et $\mathcal{C} = 2\pi r^2\Omega$, pour $r > a$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{v}) = \vec{0}$ et $\mathcal{C} = 2\pi a^2\Omega$.

Exercices

1. Écoulement à l'intérieur d'un dièdre droit

Soit, dans la région $x > 0$, $y > 0$ l'écoulement défini par : $\overrightarrow{v} = k(-x\overrightarrow{e_x} + y\frac{t}{t_0}\overrightarrow{e_y})$, où k est une constante positive.

Ce champ des vitesses correspond à un écoulement d'un fluide parfait, les plans $x = 0$ et $y = 0$ jouant le rôle de parois.

1. Cet écoulement est-il compatible avec un fluide incompressible ? Est-il irrotationnel ?
2. Déterminer l'équation des lignes de courant.
3. Les lignes de courant sont-elles confondues avec les trajectoires des particules de fluide ?
4. Calculer l'accélération $\overrightarrow{a}$ en chaque point de l'écoulement en utilisant la description eulérienne du fluide et l'expression de la dérivée particulaire.

2. Circulation entre deux disques

Un jet d'air est envoyé entre deux disques parallèles de rayons R et distants de e, à travers un trou au centre de l'un des disques. On considère, entre les disques, l'écoulement comme incompressible. Le champ des vitesses est purement radial et ne dépend que de r : $\overrightarrow{v}(M,t) = v(r)\overrightarrow{u_r}$.

1. Déterminer la loi de vitesse d'écoulement de l'air entre les disques. On notera v_0 la vitesse de l'air aux bords des disques.
2. Déterminer l'accélération pour $r = 0,5R$ et $r = R$ en prenant $v_0 = 5$ m/s et $R = 50$ cm.

On donne

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rA_r)}{\partial\,r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\,A_\theta}{\partial\,\theta} + \frac{\partial\,A_z}{\partial\,z}$$

3. Écoulement entre deux cylindres

On considère un fluide s'écoulant entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 tournant autour de leur axe aux vitesses angulaires ω_1 et ω_2. Le champ des vitesses en coordonnées cylindriques a pour expression : $\overrightarrow{v}(M,t) = (Ar + \frac{B}{r})\overrightarrow{u}_\theta$.

1. Caractériser complètement cet écoulement (compressible ou non ? stationnaire ou non ? etc...).
2. Déterminer l'expression du débit volumique à travers une section de hauteur h perpendiculaire à l'écoulement.
3. Déterminer l'accélération du fluide.
4. Déterminer les constantes A et B en écrivant la continuité des vitesses du fluide et des cylindres.
5. Commenter le cas $\omega_1 = \omega_2$.

On donne en repère cylindrique :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rv_r)}{\partial\,r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\,v_\theta}{\partial\,\theta} + \frac{\partial\,v_z}{\partial\,z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\,v_z}{\partial\,\theta} - \frac{\partial\,v_\theta}{\partial\,z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial\,v_r}{\partial\,z} - \frac{\partial\,v_z}{\partial\,r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\,(rv_\theta)}{\partial\,r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\,v_r}{\partial\,\theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

4. Écoulement bidimensionnel

On considère un écoulement bidimensionnel de fonction potentiel

$$\Phi(r,\theta) = U\theta$$

en coordonnées cylindriques.

On rappelle :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rv_r)}{\partial\,r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\,v_\theta}{\partial\,\theta} + \frac{\partial\,v_z}{\partial\,z}$$

1. (a) Déterminer les lignes équipotentielles de cet écoulement.
   (b) Déterminer le champ des vitesses $\overrightarrow{v}$.
   (c) L'écoulement est-il incompressible ?
2. Calculer la circulation du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$:
   (a) sur une courbe (Γ) n'entourant pas l'origine ;
   (b) sur une courbe (Γ') entourant l'origine.
3. Déterminer le champ des accélérations dans cet écoulement.

5. Écoulement autour d'un pilier

On s'intéresse à l'écoulement plan laminaire incompressible irrotationnel autour d'un cylindre solide de rayon a, de hauteur infinie et d'axe (Oz).

1. Représenter schématiquement les lignes de courant d'un tel écoulement en indiquant les points remarquables. Préciser la condition que doit satisfaire le champ des vitesses sur les parois du cylindre.

   Le fluide est de l'air. On admettra que le potentiel de vitesse associé au champ de vitesse de l'écoulement est donné par l'équation :
   $$\phi(M) = v_0 r \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos\theta$$
   en coordonnées polaires.
2. Quelle relation lie le champ des vitesses au potentiel des vitesses ?
3. Déterminer les composantes polaires v_r et v_θ du vecteur vitesse.
4. Préciser les points d'arrêts (vitesse nulle).
5. On met maintenant le cylindre en rotation autour de son axe fixe avec une vitesse angulaire ω uniforme, dans le sens horaire. Pour tenir compte de l'effet de rotation du cylindre sur l'écoulement du fluide, on ajoute dans l'expression générale du potentiel des vitesses une singularité tourbillonnaire de circulation Γ. La circulation du vecteur vitesse sur une courbe $\mathcal{C}$ est définie par $\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{ell}$. Le potentiel des vitesses devient alors :
   $$\phi(M) = v_0 r \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos\theta + \frac{\Gamma\theta}{2\pi}$$
   Déterminer les nouvelles composantes du champ des vitesses.

6. Débit-volume d'un écoulement de Poiseuille

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans une canalisation cylindrique d'axe Oz, de rayon a dont le profil des vitesses est donné en un point $M(r, \theta, z)$ par :
$$\overrightarrow{v}(M) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \overrightarrow{u}_z$$
où v_0 est la vitesse sur l'axe de la conduite, qui dépend du rayon a, de la viscosité dynamique du fluide η et du gradient longitudinal de pression $\left|\frac{dP}{dz}\right|$ supposé constant.
Ce type d'écoulement est appelé écoulement de Poiseuille.

1. Sachant que le coefficient η s'exprime dans le système international d'unités en Pa.s, déterminer par analyse dimensionnelle, à un facteur numérique de proportionnalité près noté K, l'expression de v_0.
   Par un calcul rigoureux on établit que $K = 1/4$, valeur qui sera retenue pour la suite.
2. Définir puis exprimer en fonction de a et v_0 le débit-volume D_V de l'écoulement.
3. On appelle vitesse débitante v_D la vitesse définie par :
   $$v_D = \frac{D_V}{\pi a^2}$$
   Comparer v_0 et v_D. Quel est le type d'écoulement associé à v_D ?

4. Prouver à partir du seul champ des vitesses que l'écoulement de Poiseuille étudié précédemment est un écoulement incompressible.

   On donne en cylindriques :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rv_r)}{\partial\,r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\,v_\theta}{\partial\,\theta} + \frac{\partial\,v_z}{\partial\,z}$$

5. Que vaut la "vorticité" de cet écoulement ? Définir et exprimer le vecteur tourbillon $\overrightarrow{\Omega}$.

   On rappelle en coordonnées cylindriques pour un champ vectoriel $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\,v_z}{\partial\,\theta} - \frac{\partial\,v_\theta}{\partial\,z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial\,v_r}{\partial\,z} - \frac{\partial\,v_z}{\partial\,r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\,(rv_\theta)}{\partial\,r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\,v_r}{\partial\,\theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

   Peut-on associer à un écoulement de Poiseuille un potentiel des vitesses ?

7. Écoulement d'eau autour d'une bulle de gaz

Le rayon $a(t)$ d'une bulle de gaz fixe de centre O varie au cours du temps. L'espace autour de la bulle est rempli d'eau et on suppose l'écoulement incompressible. Vu les symétries, on cherche un champ des vitesses de la forme

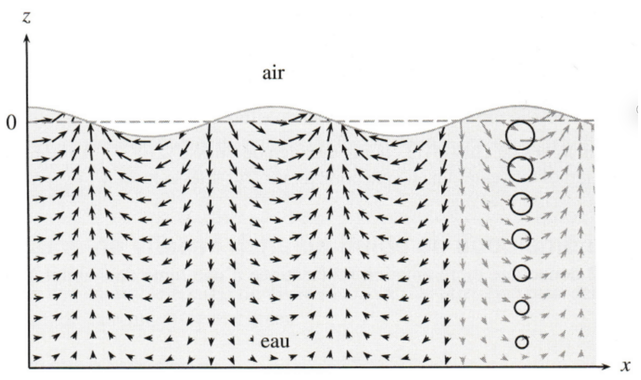
$$\overrightarrow{v}(r,t) = v(r,t)\vec{e}_r$$

1. Exprimer le débit de volume à travers la sphère de rayon r. En déduire que $v(r,t) = \dfrac{f(t)}{r^2}$ où $f(t)$ est une fonction inconnue du temps.
2. Retrouver le résultat en utilisant l'expression de la divergence en coordonnées sphériques pour un champ de la forme $\overrightarrow{v}(r,t) = v(r,t)\vec{e}_r$:

$$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{a}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\,(r^2 a_r)}{\partial\,r}$$

3. En déduire l'expression de $v(r,t)$ en fonction de r, $a(t)$ et $\dot{a}(t) = \dfrac{da(t)}{dt}$. Montrer que le champ des vitesses dérive d'un potentiel $\Phi(r,t)$ et l'expliciter.
   Que peut-on en conclure quant à la rotation des particules fluides ?

8. Modèle de houle



On considère le phénomène de propagation de la houle : ondes de gravitation à la surface d'un océan profond. Dans le cadre d'un modèle simple d'un écoulement invariant suivant y se propageant vers x croissant, on admet que le potentiel des vitesses s'écrit

$$\phi(\overrightarrow{r},t) = \phi_0 \exp(kz)\cos(kx - \omega t).$$

1. Cet écoulement est-il stationnaire ?
2. Calculer le champ des vitesse $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{r},t)$.
3. Cet écoulement est-il incompressible ?
4. Cet écoulement est-il irrotationnel ?