Dynamique des fluides

Applications directes du cours

$\boxed{1}$ On donne les vitesse typiques et la dimensions de balles pour plusieurs sports :

	Football	Golf	Tennis	Ping-pong
Diamètre (cm)	22	4,3	6,4	4,0
Vitesse (km.h^{-1})	55	260	180	60

Calculer dans chaque cas le nombre de Reynolsd sachant que $\mu_{air} = 1,2$ kg.m^{-3} et que $\eta_{air} = 2,0.10^{-5}$ Pℓ.

$\boxed{2}$ Deux écoulements d'échelles différentes sont identiques si ils ont le même nombre de Reynolds. On considère un écoulement de masse volumique ρ, de viscosité η, de vitesse caractéristique U, variant sur une dimension caractéristique L.

1. On étudie un avion de longueur L destiné à voler à vitesse U dans l'air. Une maquette de cet avion à l'échelle 1/10 ème est étudiée dans une soufflerie à air. Quelle doit être, en fonction de U, la vitesse de l'écoulement ?
2. Au lieu d'une soufflerie à air, on utilise une veine liquide (tunnel à écoulement d'eau). Quelle vitesse doit avoir l'eau pour simuler la réalité ?

Données : $\eta_{air} = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Pℓ ; $\eta_{eau} = 1,0 \cdot 10^{-3}$ Pℓ.

$\boxed{3}$ Retrouver la relation fondamentale de la statique des fluides à partir de l'équation d'Euler.

$\boxed{4}$ On s'intéresse à un tuyau d'eau de diamètre intérieur $d = 12$ mm. Justifier le fait que pour un débit volumique $D_1 = 0,2$ L/min, l'écoulement est laminaire et que pour un débit $D_2 = 10$ L/min, l'écoulement est turbulent.

$\boxed{1}$ $R_{e,\text{Foot}} \simeq R_{e,\text{Golf}} \simeq R_{e,\text{Tennis}} \simeq 2 \cdot 10^5$: force de traînée quadratique ; $R_{e,\text{PingPong}} \simeq 4 \cdot 10^4$. $\boxed{2}$ $U' = 10U$; $U' = 10\dfrac{\mu_{\text{air}}}{\mu_{\text{eau}}}\dfrac{\eta_{\text{air}}}{\eta_{\text{eau}}}U$, $U' = 0,7U$. $\boxed{3}$ Cours. $\boxed{4}$ $R_e = \dfrac{\mu D_V}{\eta d}$, $R_{e,1} = 3 \cdot 10^2 < 2 \cdot 10^3$: laminaire ; $R_{e,2} = 1,4 \cdot 10^4 > 2 \cdot 10^3$: turbulent.

Exercices

1. Mesure de viscosité

On lâche une bille sphérique de rayon $R = 1,25$ mm de masse volumique $\mu_S = 3800$ kg.m^{-3} dans une éprouvette graduée contenant un liquide visqueux dont on veut déterminer la viscosité η. La masse volumique du fluide est $\mu_f = 1260$ kg.m^{-3}. On admet que la force de frottement visqueux sur la bille est donnée par la formule de Stokes.

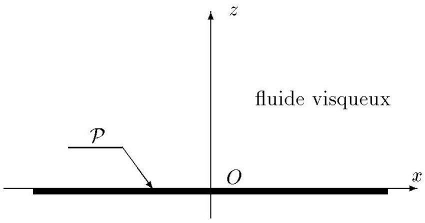
1. Montrer que la vitesse de la bille tend vers une vitesse limite V_0, que l'on exprimera en fonction de μ_f, μ_S, R, η et g accélération de la pesanteur ($g = 9,8$ SI) . Au bout de combien de temps peut-on considérer que la bille a atteint sa vitesse limite ?
2. Le temps mis par la bille pour parcourir les trois premiers cm est de 7,0 s, les trois suivants de 6,1 s, les trois suivants de 6,0 s, les trois suivants de 6,0 s. Déterminer la viscosité du fluide.
3. Vérifier que la formule de Stokes est applicable.

2. Mouvement oscillant dans un fluide visqueux

Une plaque $\mathcal{P}$ est animée dans son plan ($z = 0$) d'un mouvement oscillatoire sinusoïdal de pulsation ω ; la vitesse de la surface oscillante est

$$\overrightarrow{V_0} = V_0 \cos \omega t \overrightarrow{e_x}.$$

Elle est surmontée (dans le demi-espace $z > 0$) d'un fluide visqueux de coefficient de viscosité η, supposé incompressible et homogène, de masse volumique ρ.
On limite notre étude à un voisinage du point O centre de la plaque, ce qui permet de négliger les effets de bord. On négligera les effets de la pesanteur.



Le plan $(M, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ est un plan de symétrie, donc $v_y = 0$. La plaque étant illimité, il y a invariance par translation selon $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$; la vitesse $\overrightarrow{v}$ est donc indépendante de x et de y, soit

$$\overrightarrow{v} = v_x(z,t)\overrightarrow{e_x} + v_z(z,t)\overrightarrow{e_z}$$

1. Montrer que $v_z(z,t) = 0$.
2. Montrer que le terme convectif de Navier-Stokes est nul pour ce problème.
3. Écrire l'équation que doit satisfaire le fluide dans le demi-espace $z > 0$.
4. En déduire une solution du problème proposé de la forme

$$v(z,t) = Ae^{-kz}\cos(\omega t - kz + \varphi).$$

   On déterminera les constantes A, k et φ.
5. Évaluer le paramètre δ caractérisant l'épaisseur de pénétration de l'onde de cisaillement dans le fluide.
   Application numérique : Calculer δ dans le cas de l'eau avec $\eta = 10^{-3}$ Pa.s pour une fréquence $\nu = 1$ kHz, puis $\nu = 1$ MHz. Conclusions ?
6. Calculer la force de frottement agissant sur l'unité de surface du plan solide. En déduire la puissance des efforts exercés par la plaque sur le fluide, puis la puissance moyenne.

3. Écoulement de Poiseuille cylindrique

On étudie l'écoulement stationnaire d'un fluide de viscosité η, de masse volumique μ dans un tuyau cylindrique horizontal d'axe Oz, de rayon R et de longueur L. La pression p_A à l'entrée du tube ($z = 0$) est supérieure à la pression p_B à la sortie ($z = L$). On néglige les effets de la pesanteur.

1. Déterminer le champ des vitesses $\overrightarrow{v}(M) = v(r)\overrightarrow{u}_z$.
2. Déterminer le débit massique à travers une section du tuyau.
3. Comparer le résultat à la loi d' Ohm pour un conducteur filiforme en électrocinétique. Pour cela, introduire une résistance hydraulique R_h et l'exprimer en fonction de η, R et L.
   Comparer l'influence du rayon R sur la résistance électrique et sur la résistance hydraulique et commenter.

On donne en repère cylindrique :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

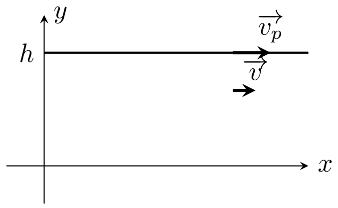
$$\Delta v(r)\overrightarrow{u_z} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\overrightarrow{u_z}$$

4. Écoulement de Couette plan

On considère un fluide de viscosité η et de masse volumique μ s'écoulant entre deux plans horizontaux d'abscisses $z = 0$ et $z = a$. Le plan $z = 0$ est immobile dans le référentiel d'étude et le plan $z = a$ possède la vitesse $\overrightarrow{v}_0 = V_0\vec{u}_x$. On suppose que le régime permanent est atteint et que les champs de pression et de vitesse sont de la forme $p(z)$ et $\overrightarrow{v}(M) = v(z)\overrightarrow{u}_x$.
Déterminer le champ de pression (on ne néglige pas la pesanteur) ainsi que le champ de vitesses.

5. Écoulement entre deux plaques

On étudie un écoulement stationnaire invariant par translation selon $\overrightarrow{e_z}$. L'écoulement est incompressible et unidirectionnel selon $\overrightarrow{e_x}$.



On note ρ la masse volumique et $\overrightarrow{f_v} = \eta\Delta\overrightarrow{v}$ la force volumique de viscosité. La force volumique de pesanteur est négligée.

Les conditions aux limites sont

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(h) = v_p \end{cases}$$

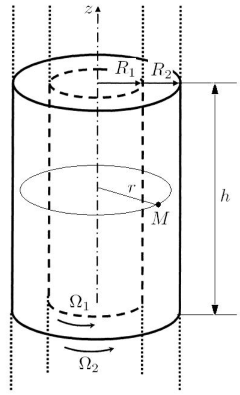
1. Montrer que $\overrightarrow{v} = v(y)\overrightarrow{e_x}$.
2. Établir que
$$v = v_p\left(\frac{y}{h} - \frac{h^2}{2\eta v_p}\frac{dP}{dx}\frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right)\right)$$
3. Après avoir exprimé la dimension physique de
$$\alpha = \frac{h^2}{2\eta v_p}\frac{dP}{dx}$$
dessiner les différents profils de vitesse en fonction du signe de α.
4. Calculer le débit entre les deux plaques sur une largeur ℓ selon $\overrightarrow{e_z}$. En déduire une valeur remarquable de α.

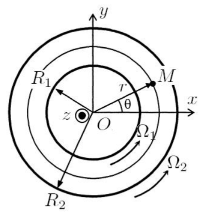
6. Viscosimètre de Couette

Un fluide incompressible est en mouvement stationnaire entre deux cylindres circulaires de rayons R_1 et R_2 qui tournent autour de leur axe commun aux vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2 constantes. On suppose que la hauteur h des cylindres est grande devant les deux rayons, de sorte que l'écoulement pourra être supposé invariant par translation selon $\overrightarrow{u_z}$. On néglige les effets de la pesanteur.

Le champ des vitesses est, *a priori* de la forme :

$$\overrightarrow{v}(M,t) = v_r(r)\overrightarrow{u_r} + v_\theta(r)\overrightarrow{u_\theta}$$





On donne, en repère cylindrique :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rA_r)}{\partial\,r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\,A_\theta}{\partial\,\theta} + \frac{\partial\,A_z}{\partial\,z}$$

1. Écrire la condition d'incompressibilité et les conditions aux limites imposées par les parois. En déduire que le champ des vitesses est de la forme $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{u_\theta}$.
2. Écrire l'équation de Navier-Stokes. Grâce aux conditions aux limites imposées par les parois, déterminer le champ des vitesses et le champ des pressions.

   On donne, pour $\overrightarrow{v}(r) = v(r)\overrightarrow{u_\theta}$:

$$\Delta\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rv)\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

3. Vérifier que la viscosité n'intervient pas. Peut-on en déduire que l'écoulement est inchangé si le fluide est parfait ?
4. On admet que la force surfacique de viscosité exercée par le fluide à l'intérieur du cylindre d'axe Oz et de rayon r sur le fluide à l'extérieur de ce cylindre s'exprime par

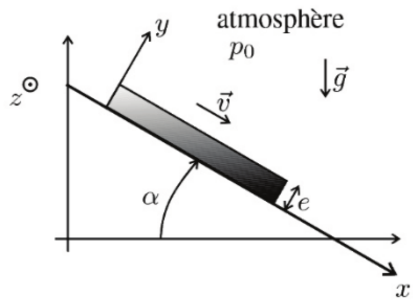
$$\overrightarrow{\varphi}_{s,visc} = -\eta r\frac{d}{dr}\left(\frac{v(r)}{r}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

   Calculer le moment par rapport à l'axe Oz des efforts exercés par le cylindre extérieur sur le fluide.
5. Le cylindre intérieur est lié à un fil de torsion de constante de rappel C ; le cylindre extérieur est mis en rotation par un moteur électrique régulé à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega_2} = \Omega\overrightarrow{u_z}$. On s'intéresse au régime stationnaire.
   Pour $\Omega = 5$ rad/s, $R_2 = 5$ cm, $e = 1$ mm, $h = 10$ cm, on mesure un angle de torsion $\theta_e = 4,6^o$ pour $C = 5.10^{-3}$ N.m.rad^{-1}. En déduire la viscosité du fluide.

7. Écoulement sur un plan incliné

Un fluide de masse volumique μ et de viscosité η s'écoule sur une épaisseur e constante sur un plan incliné d'angle α. On note $\overrightarrow{u}_y$ la perpendiculaire ascendante au plan incliné et $\overrightarrow{u}_x$ la ligne de plus grande pente descendante. L'écoulement est stationnaire, incompressible, décrit par le champ des vitesses

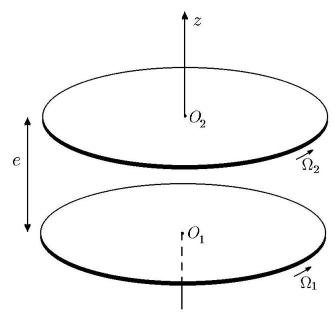
$$\overrightarrow{v} = v(x,y)\overrightarrow{u}_x$$



La pression de l'atmosphère au dessus du fluide est uniforme et vaut p_0, la viscosité de l'air étant négligée.

1. Montrer que $v(x,y)$ est indépendant de x.
2. Justifier que la pression s'écrit $p = p(y)$, puis l'exprimer.
3. À la surface libre, sur le plan d'équation $y = e$, la contrainte tangentielle exercée à la surface libre par la couche d'air sur la couche de miel est nulle. Écrire, en les justifiant, les conditions aux limites relatives à la vitesse v, en $y = 0$ et à sa dérivée $\dfrac{dv}{dy}$ en $y = e$. Déterminer alors complètement le champ de vitesses.
4. En déduire le débit volumique D_v pour une largeur L.

8. Fluide entre deux disques en rotation



Deux disques distants de e tournent aux vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2 autour de leur axe commun Oz.

Le domaine entre les deux disques est occupé par un fluide visqueux de masse volumique μ et de viscosité dynamique η initialement immobile dans le référentiel terrestre. On recherche un champ des vitesses sous la forme

$$\overrightarrow{v}(M,t) = r\omega(z,t)\overrightarrow{e_\theta}$$

en coordonnées cylindriques.

1. Déterminer l'expression du champ des vitesses en régime stationnaire.
2. Donner une estimation de la durée τ du régime transitoire.

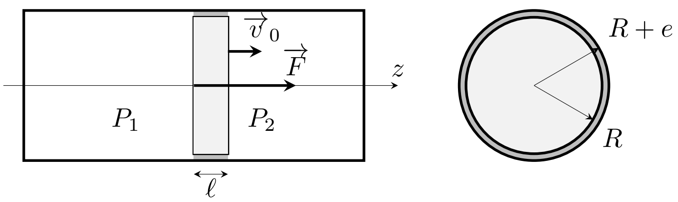
On donne :

$$\Delta\overrightarrow{A} = \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial r} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \dfrac{A_r}{r^2}\right)\overrightarrow{e_r} \\ \left(\dfrac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial r} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} - \dfrac{A_\theta}{r^2}\right)\overrightarrow{e_\theta} \\ \left(\dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_z} \end{array}$$

9. Freinage d'un piston

Un piston en forme de disque de rayon R et d'épaisseur ℓ est en mouvement dans un cylindre fermé de rayon $R+e$. Le piston est mis en mouvement à la vitesse constante $v_0\overrightarrow{e_z}$ par application d'une force $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{e_z}$.

On modélise l'écoulement dans l'espace compris entre le cylindre et le piston par un champ des vitesses $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{e_z}$.



On donne :

$$\Delta\overrightarrow{A} = \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial r} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \dfrac{A_r}{r^2}\right)\overrightarrow{e_r} \\ \left(\dfrac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial r} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} - \dfrac{A_\theta}{r^2}\right)\overrightarrow{e_\theta} \\ \left(\dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_z} \end{array}$$

1. (a) On néglige la force de viscosité exercée sur la surface latérale du piston devant les forces pressantes sur ses faces planes. Exprimer la différence de pression entre les deux faces du piston en fonction de F et des dimensions du piston.
   (b) On néglige aussi les forces de pesanteur. Exprimer le gradient de pression dans l'espace compris entre le cylindre et le piston.

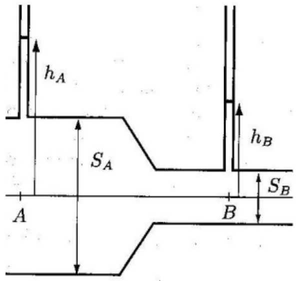
2. (a) Justifier un champ de vitesse de la forme

$$v(r) = v_0 + v_1 \ln\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{F}{4\pi\eta\ell}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

où v_1 est une constante d'intégration dont on donnera la dimension physique.

(b) On pose $v_2 = \dfrac{F}{4\pi\eta\ell}$ et $r = R(1+u)$, avec $u \ll 1$; donner une expression approchée de $v(u)$ en se limitant aux termes d'ordre 2 en u.

10. Tube de Venturi



Un tube de Venturi est utilisé pour mesurer le débit volumique à l'intérieur d'une canalisation. Il est inséré dans cette canalisation (à une jonction) de section S_A au point A. Le tube se resserre ensuite jusqu'au point B où la section est $S_B < S_A$. Au dessus des points A et B se trouvent deux tubes minces verticaux et ouverts à l'air libre (pression atmosphérique P_0). Au dessus du point A, la hauteur de liquide est h_A et au dessus du point B, h_B.

L'écoulement du fluide est supposé parfait stationnaire incompressible et homogène. Il est unidirectionnel sur les sections S_A et S_B.

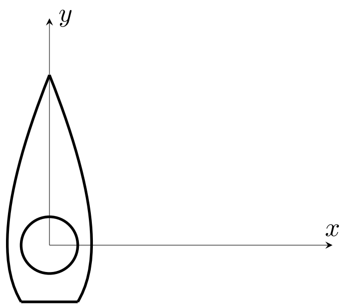
1. Justifier que l'on puisse utiliser la loi de l'hydrostatique pour exprimer les pressions en A et B.
2. Trouver deux relations entre les vitesses v_A et v_B.
3. Exprimer v_A en fonction de h_A, h_B, S_A et S_B et en déduire l'expression du débit volumique.

11. Équilibre géostrophique

On veut étudier le mouvement de l'atmosphère terrestre. Aussi, on se place dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}$ non galiléen, en rotation par rapport au référentiel géocentrique $\mathscr{R}_G$ avec le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}_{\mathscr{R}/\mathscr{R}_G}$, au voisinage d'un point de la Terre à la latitude λ. On s'intéresse à un écoulement plan, horizontal.

1. Exprimer la projection horizontale de la force d'inertie de Coriolis massique. Quel est son effet ?
2. Réécrire l'équation d'Euler pour les grands écoulements (l'accélération convective est négligeable devant l'accélération de Coriolis) en régime permanent.
3. Comparer les lignes de courant et les isobares. Dans quel sens tourne l'air atmosphérique ?

12. Effet Magnus ; voile de Flettner



Un bateau est muni d'un cylindre vertical de rayon R et de hauteur h, tournant autour d'un axe vertical à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega} = \omega\overrightarrow{e_z}$. L'air est assimilé à un fluide parfait incompressible et le vent souffle à une vitesse uniforme constante $\overrightarrow{u} = u\overrightarrow{e_x}$.
L'écoulement de potentiel des vitesses :

$$\varphi_1 = u\cos\theta\left(\frac{R^2}{r} + r\right)$$

correspond au mouvement du vent autour du cylindre fixe.
On rappelle que $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi_1$.

L'écoulement de vitesse $\overrightarrow{v_2} = \dfrac{C}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$ pour $r \geq R$ correspond à l'effet d'entraînement de l'air par le cylindre en rotation. On supposera dans tout le problème le régime stationnaire établi et l'écoulement du fluide irrotationnel.

1. Donner la relation entre la constante C et ω. On remarquera que, dans ce modèle, la vitesse du vent sur le cylindre est celle du cylindre, autrement dit que la vitesse tangentielle ne s'annule pas sur la paroi du cylindre.
2. Sachant que pour $r > R$ le comportement du vent peut être modélisé par la superposition des écoulements caractérises par $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, calculer, en coordonnées polaires, les composantes de la vitesse du vent $\overrightarrow{v}$. Tracer l'alluer des lignes de courant correspondant à cet écoulement.
3. Sachant que, loin du bateau, le vent n'est pas perturbé et que la pression est égale à la pression atmosphérique p_0, déterminer, en fonction de l'angle θ, la pression autour du cylindre ($r = R$).
4. Déterminer les composantes, dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$, de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le cylindre par unité de hauteur. Représenter cette force sur la figure sur laquelle sont tracées les LDC, en précisant les zones de forte et de basse pression.
5. Préciser sur un schéma le sens de rotation du cylindre correspondant à une force propulsive. Quelle est l'allure du vent la plus favorable.
6. La vitesse du vent est 10 m.s^{-1}, la masse volumique de l'air $\rho = 1,3$ kg.m^{-3}. Le cylindre a une hauteur de 10 m et un rayon de 30 cm. La vitesse angulaire a pour valeur $\omega = 30$ rad.s^{-1}. Calculer la valeur numérique maximale de la force propulsive.
7. À partir de l'étude précédente, expliquer pourquoi une balle animée, par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, d'une vitesse initiale $\overrightarrow{u} = u\overrightarrow{e_x}$, et d'une vitesse de rotation propre $\overrightarrow{\omega} = \omega\overrightarrow{e_z}$ décrit une trajectoire gauche.