

# Mesure de l'activité sismique d'une étoile par interférométrie

## I Interférométrie

1. a) La lame semi-réfléchissante  $SR$  permet d'effectuer la division d'amplitude : une moitié de la lumière incidente est envoyée dans la voie 1, et l'autre moitié est envoyée dans la voie 2. La lentille  $L$  permet d'observer sur un écran à distance finie les interférences à l'infini entre les deux faisceaux, ce qui autorise l'utilisation d'une source étendue.

b) Par la voie 1, la moitié de la lumière réfléchiée par  $M_1$  est réfléchiée par  $SR$  et envoyée sur  $E$  ; l'autre moitié est transmise par  $SR$  et perdue.

De même pour la voie 2, la moitié de la lumière réfléchiée par  $M_2$  est transmise par  $SR$  et envoyée sur  $E$  ; l'autre moitié est réfléchiée par  $SR$  et perdue.

2.  $\delta = D \cos i$ .

a) La tache centrale en  $F'$  étant brillante, il existe un entier  $n$  tel que

$$D\sigma_0 = n.$$

L'ordre d'interférence décroît à partir du centre ; l'angle d'incidence  $i_1$  du premier anneau sombre est déterminé par

$$D\sigma_0 \cos i_1 = n - \frac{1}{2} \text{ soit } D\sigma_0(1 - \cos i_1) = \frac{1}{2}.$$

Dans l'approximation des petits angles, on en déduit

$$D\sigma_0 \left(1 - \frac{i_1^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ soit } i_1 = \frac{1}{\sqrt{D\sigma_0}}.$$

Le rayon  $r_1$  du 1<sup>er</sup> anneau sombre est donc

$$r_1 = f' i_1 = \frac{f'}{\sqrt{D\sigma_0}}.$$

b) La cohérence temporelle et la cohérence spatiale sont imparfaites ; les anneaux sont donc moins contrastés.

3. a) Les vibrations lumineuses sur les deux voies ont la même amplitude et sont déphasées de  $\varphi = \frac{2\pi D}{\lambda_0} = 2\pi\sigma_0 D$ , ce qui s'exprime par

$$\psi_1 = \psi_2 e^{j\varphi}.$$

La vibration lumineuse résultante est

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_2(1 + e^{j\varphi}),$$

ce qui donne une intensité résultante

$$I = \alpha\psi\psi^* = \alpha\psi_2\psi_2^*(1 + e^{j\varphi})(1 + e^{-j\varphi}) = 2\alpha\psi_2\psi_2^*(1 + \cos\varphi)$$

$S$  étant proportionnel à l'intensité, on en déduit que

$$S(D) = S_0(1 + \cos\varphi) = S_0(1 + \cos 2\pi\sigma_0 D),$$

où  $S_0$  est la valeur moyenne de  $S(D)$ .

b) La période de l'interférogramme est  $\Delta D = \frac{1}{\sigma_0}$ .

4. Doublet de nombres d'onde  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  voisins.

a) La contribution de la composante de nombre d'onde  $\sigma_1$  du doublet est

$$I_1 = I_0(1 + \cos 2\pi\sigma_1 D),$$

et, de même, celle de la composante de nombre d'onde  $\sigma_2$  est

$$I_2 = I_0(1 + \cos 2\pi\sigma_2 D).$$

Ces deux ondes étant mutuellement incohérentes, leurs intensités lumineuses s'ajoutent, soit

$$\begin{aligned} I &= I_0(2 + \cos 2\pi\sigma_1 D + \cos 2\pi\sigma_2 D) \\ &= 2I_0(1 + \cos[\pi(\sigma_2 - \sigma_1)D] \cos(2\pi\sigma_m D)) \end{aligned}$$

avec

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

On en déduit que la période des franges est

$$\Delta_f D = \frac{1}{\sigma_m}$$

tandis que la période des brouillages est

$$\Delta_b D = \frac{1}{|\sigma_2 - \sigma_1|}.$$

b) *Application numérique :*

L'allure de l'interférogramme pour le doublet du sodium est représentée ci-dessus ; pour rendre la figure lisible, on n'a pas respecté les valeurs numériques, car  $\frac{\sigma_m}{\sigma_2 - \sigma_1} = 981$  franges sont visibles entre deux brouillages.

## II Interférogramme d'une raie élargie

1. Le profil spectral de la source n'est plus monochromatique mais possède une largeur  $\Delta\sigma$ .

a) L'intensité lumineuse est alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty I_\sigma (1 + \cos 2\pi\sigma\delta) d\sigma \\ &= \frac{I_0}{\Delta\sigma} \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} (1 + \cos 2\pi\sigma\delta) d\sigma \\ &= \frac{I_0}{\Delta\sigma} \left[ \Delta\sigma + \frac{1}{2\pi\delta} \left( \sin 2\pi\delta \left( \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right) - \sin 2\pi\delta \left( \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \right) \right) \right] \\ &= I_0 \left[ 1 + \frac{1}{2\pi\delta\Delta\sigma} 2 \sin \pi\delta\Delta\sigma \cos 2\pi\sigma_0\delta \right] \\ &= I_0 [1 + \text{sinc}(\pi\delta\Delta\sigma) \cos(2\pi\sigma_0\delta)] \end{aligned}$$

Le signal détecté étant proportionnel à l'intensité, il est donné par :

$$S(D) = S_0(1 + v \cos 2\pi\sigma_0 D) \text{ avec } v = \text{sinc}(\pi\delta\Delta\sigma);$$

l'allure de la courbe est donnée ci-dessous :

b) La plus petite valeur de  $D$  qui annule la fonction de visibilité est

$$D_{\Delta\sigma} = \frac{1}{\Delta\sigma}.$$

2. a) Si  $D$  est supérieur à  $\frac{1}{\Delta\sigma}$ , il n'y a pratiquement plus d'interférences pour le spectre large, car la visibilité est devenue trop faible.

b) L'intensité incidente est la différence entre l'intensité totale et l'intensité absorbée, soit

$$I_\sigma = I_c - I_a \text{ avec } I_a = \begin{cases} \frac{I_a}{\Delta\sigma} & \text{pour } \sigma \in \left[ \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}, \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right] \\ 0 & \text{pour } \sigma \notin \left[ \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}, \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right] \end{cases}$$

ce qui donne, en considérant la raie d'absorption quasi-monochromatique de largeur  $\Delta\sigma$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1}^{\sigma_2} \frac{I_c}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1} (1 + \cos 2\pi\sigma D) d\sigma - \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} \frac{I_a}{\Delta\sigma} (1 + \cos 2\pi\sigma D) d\sigma \\ &= I_c - I_a - I_a \text{sinc}(\pi\Delta\sigma D) \cos(2\pi\sigma_0 D) \\ &\simeq I_c \left( 1 - \frac{I_a}{I_c} \text{sinc}(\pi\Delta\sigma D) \cos(2\pi\sigma_0 D) \right) \end{aligned}$$

en considérant que  $I_c \gg I_a$ , ce qui donne bien

$$S(D) = S_c(1 + C \cos 2\pi\sigma_0 D)$$

où  $S_c$  est proportionnel à  $I_c$  et un contraste de franges

$$C = \frac{I_a}{I_c} \text{sinc}(\pi\Delta\sigma D)$$

qui se réduit à

$$C = \frac{I_a}{I_c}$$

si la raie d'absorption est rigoureusement monochromatique.

### III Élargissement et décalage possibles des raies spectrales.

#### Évaluation de la différence de marche optimale

Pour  $V/c \ll 1$  :

$$\nu - \nu_0 = \nu_0 \frac{V \cos \theta}{c}.$$

1. a) La vitesse quadratique moyenne  $V_T$  d'un atome de l'étoile est telle que

$$\frac{1}{2} m_H V_T^2 = \frac{3}{2} k_B T \text{ soit } V_T = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_H}}.$$

b) La dispersion des vitesses entraîne par conséquent un élargissement de la raie autour de la valeur  $\Sigma_0$

$$\Delta\sigma_K = \frac{1}{c}(\nu_{max} - \nu_{min}) = \frac{\nu_0}{c} \frac{V_T}{c} = \frac{2\sigma_0 V_T}{c}.$$

c) *Application numérique* : Pour  $T = 6000$  K et  $\sigma_0 = 2.10^6 \text{ m}^{-1}$ , on obtient  $\Delta\sigma_K = 163 \text{ m}^{-1}$ .

2. a) L'influence de la rotation sur la largeur de raie est nulle pour  $\psi = 0$  ; la vitesse est alors orthogonale à la direction de visée. Elle est maximale pour  $\psi = \frac{\pi}{2} [\pi]$  ; dans ce dernier cas, la rotation de l'étoile, phénomène parfaitement déterminé, conduit à un élargissement de la raie d'émission analogue à celui associé aux mouvements erratiques des atomes car l'observation effectuée est globale et concerne la totalité de la surface de l'étoile. On reçoit donc de la lumière correspondant à toutes les valeurs de  $\psi$ .

b) Toujours dans le cas d'une influence maximale de la rotation, la contribution de la rotation stellaire est à la largeur de raie est

$$\Delta\sigma_{rot} = \frac{2\sigma_0 V_{rot}}{c}.$$

Ce terme est comparable à  $\Delta\sigma_K$  lorsque  $V_{rot} = V_T$ .

c) *Application numérique* : Pour une étoile dont la température de surface est

$T_s = 6000$  K, l'élargissement dû à la rotation est comparable à l'élargissement Doppler pour  $V_{rot} = 1,22.10^4 \text{ m.s}^{-1}$ .

3. a) Le nombre d'onde dépend du temps selon la loi

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left( 1 + \frac{\Delta v(t)}{c} \right)$$

ce qui conduit à un interférogramme

$$\begin{aligned} S(D_0) &= S_c [1 + C \cos(2\pi\sigma(t)D_0 + \varphi)] \\ &= S_c \left[ 1 + C \cos \left( 2\pi\sigma_0 \left( 1 + \frac{\Delta v(t)}{c} \right) D_0 + \varphi \right) \right] \\ &= S_c [1 + C \cos(2\pi\sigma_0 D_0 + \varphi)] \end{aligned}$$

avec

$$\varphi = 2\pi\sigma_0 D_0 \frac{\Delta v(t)}{c}.$$

b) Cette relation implique, pour une détection optimale, le choix d'une différence de marche  $D_0$  la plus grande possible, afin d'avoir une différence de phase la plus grande possible. Mais une grande différence de marche entraîne une diminution de la visibilité. Un compromis raisonnable est

$$D_0 \approx \frac{1}{2\Delta\sigma}.$$

Si on néglige les effets de la rotation, la largeur spectrale est due à l'effet Doppler ; dans ce cas

$$D_0 \approx \frac{c}{4\sigma_0} \sqrt{\frac{m_H}{3k_B T_0}}.$$

c) En ordre de grandeur,  $\Delta\sigma$  est de l'ordre de  $\sigma_0 \frac{V_T}{c}$  ; le déphasage est donc de l'ordre de

$$\varphi \approx \sigma_0 D_0 \approx \frac{\sigma_0}{\Delta\sigma} \frac{\Delta v(t)}{c} \approx \frac{\Delta V}{V_T}.$$

4. Le mouvement de rotation de la Terre pour une observation menée à la latitude  $\lambda$  engendre des variations de vitesse de l'ordre de

$$\Delta v_{Terre} = 2R_T \Omega_T \cos \lambda = 920 \text{ m.s}^{-1}.$$

Cet effet est très important mais ne masque par les oscillations sismiques stellaires car les périodes sont très différentes (2 puissances de 10 d'écart).

## IV Amélioration du montage interférométrique

1. a) On suppose que le premier détecteur délivre un interférogramme :

$$S_1 = \frac{S_0}{2}(1 + C \cos \psi).$$

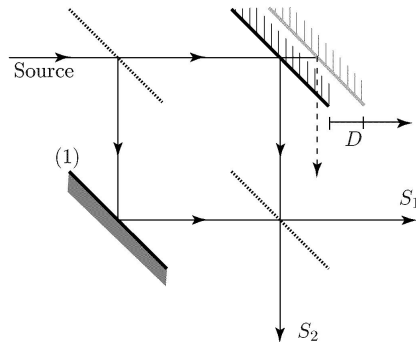
En admettant que les pertes d'énergie lumineuse dans l'appareil sont négligeables, le second détecteur délivre l'interférogramme

$$S_2 = S_0 - S_1 = \frac{S_0}{2}(1 - C \cos \psi).$$

b) Le terme de modulation interférométrique est

$$C \cos \psi = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}.$$

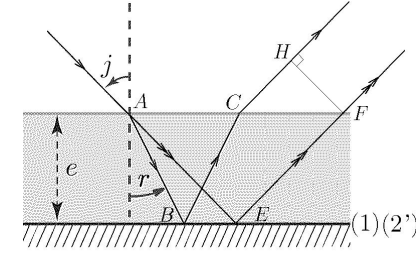
c) La recombinaison géométrique des faisceaux sur la deuxième lame semi-réfléchissante suppose la symétrie du montage, car, comme le montre la figure 4 de l'énoncé, les rayons issus des deux voies ne se superposent pas si le montage est dissymétrique. Il en résulte une différence de marche nulle, qui ne permet pas l'observation sismique stellaire discutée précédemment, puisque  $\varphi = 0$ .



2. a) La différence de marche est

$$D = (ABCH) - (AEF)$$

conformément au schéma ci-dessous.



En explicitant les différents chemins optiques, on obtient

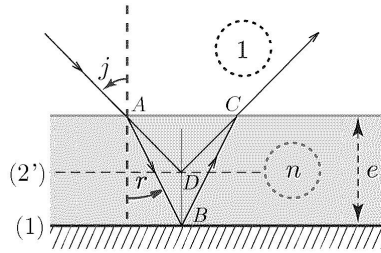
$$\begin{aligned} D &= 2n\|\vec{AB}\| + \|\vec{CH}\| - 2\|\vec{AE}\| \\ &= \frac{2ne}{\cos r} + (\|\vec{AF}\| - \|\vec{AC}\|) \sin j - \frac{2e}{\cos j} \\ &= \frac{2ne}{\cos r} + 2e(\tan j - \tan r) \sin j - \frac{2e}{\cos j}. \end{aligned}$$

La loi de Descartes pour la réfraction  $\sin j = n \sin r$  permet de mettre le résultat sous la forme ;

$$\begin{aligned} D &= \frac{2ne}{\cos r} + 2e(\tan j \sin j - n \tan r \sin r) - \frac{2e}{\cos j} \\ &= \frac{2ne}{\cos r} (1 - \sin^2 r) - \frac{2e}{\cos j} (1 - \sin^2 j) \\ &= 2e(n \cos r - \cos j) \end{aligned}$$

Les interférences sont observables à l'intersection des rayons émergents, soit à l'infini.

b) Après interposition de la lame à faces parallèles plaquée contre un miroir, on rétablit une recombinaison exacte des faisceaux par translation de l'autre miroir, comme l'indique la figure ci-dessous.



c) La lame à faces parallèles est appliquée au miroir (1). Le miroir (2) est translaté de telle sorte que l'image du rayon réfléchi de la voie 2 se superpose au rayon réfléchi de la voie 1 à partir du point  $C$ . La différence de marche est alors

$$D = 2nAB - 2AD = \frac{2ne}{\cos r} - 2e \frac{\tan r}{\sin j}.$$

La loi de Descartes pour la réfraction permet d'éliminer l'angle  $j$  par  $\sin j = n \sin r$ ; on obtient alors, conformément à l'énoncé :

$$D = \frac{2e}{\cos r} \left( n - \frac{1}{n} \right).$$

d) *Application numérique* : On cherche à imposer une différence de marche de 0,8 cm. Pour un verre d'indice  $n = 1,55$  et un angle d'incidence  $j$  de  $45^\circ$ , il faut une lame d'épaisseur  $e = 3,9$  mm.

## V Effet de la turbulence atmosphérique

1. a) Le montage afocal conserve le caractère parallèle du faisceau incident tout en concentrant l'énergie lumineuse reçue sur une section plus faible. On obtient donc une plus grande intensité lumineuse.

b) Le grandissement angulaire est

$$G = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

c) La taille  $b$  du faisceau en sortie du collecteur est telle que

$$\frac{a/2}{b/2} = |G|$$

soit

$$b = \frac{a}{|G|} = 2 \text{ cm.}$$

L'incidence sur les lames et les miroirs étant à  $\pi/4$ , les dimensions doivent être au moins égales à

$$\frac{b}{\cos \pi/4} = b\sqrt{2} = 2,8 \text{ cm.}$$

2. a) L'angle  $i$  sous lequel l'interféromètre voit les rayons d'une source stellaire est  $i = Gi_0$ .

b) En considérant que l'on utilise l'interféromètre de la partie I, la différence de marche s'exprime en fonction de la différence de marche sous incidence nulle  $D_0$  et de l'angle  $i$  par

$$D(i) = D_0 \cos i,$$

soit, dans le cas d'angle d'incidence faible :

$$D(i) = D_0 \left( 1 - \frac{i^2}{2} \right).$$

c) Pour que les fluctuations en différence de marche restent inférieures à une fraction  $\alpha$  de longueur d'onde, soit  $|\delta D| < \alpha\lambda$ , l'inclinaison maximale admissible dans l'instrument est  $i_0$  telle que

$$D \frac{i_0^2}{2} < \alpha\lambda,$$

soit

$$|i_0| < \frac{1}{G} \sqrt{\frac{2\alpha}{D_0\sigma_0}}.$$

d) *Application numérique* : On fixe  $\alpha$  au plus égal à 5 % ; pour des conditions de turbulence moyenne  $i_0 = 1''$  ; on donne  $D_0 = 0,8 \text{ cm}$  et  $\sigma_0 = 2.10^6 \text{ m}^{-1}$  . Le grossissement  $G$  maximal est

$$G_{max} = \frac{1}{i_0} \sqrt{\frac{2\alpha}{D_0\sigma_0}} = 516.$$

3. a) En remplaçant  $D_0$  par  $D(i)$  dans l'expression donnée à la question III.3.a, on obtient

$$S(D) = S_C \left[ 1 + C \cos \left[ 2\pi\sigma_0 D_0 \left( 1 + \frac{\Delta v}{c} \right) \left( 1 - \frac{i^2}{2} \right) \right] \right]$$

soit

$$S(D) \simeq S_C \left[ 1 + C \cos \left[ 2\pi\sigma_0 D_0 \left( 1 + \frac{\Delta v}{c} - \frac{i^2}{2} \right) \right] \right]$$

On mesure donc

$$\varphi' = 2\pi\sigma_0 D_0 \left( 1 + \frac{\Delta v}{c} - \frac{i^2}{2} \right)$$

soit une erreur sur la vitesse  $\delta v$  telle que :

$$\frac{\delta v}{c} = \frac{i^2}{2}.$$

b) *Application numérique* : Pour  $i_0 = 1''$  et un grossissement  $G$  égal à 165, on obtient  $\delta v \simeq 100 \text{ m.s}^{-1}$ . L'instrument étant conçu pour la mesure de vitesses sismiques dont l'amplitude est de l'ordre de  $10 \text{ cm.s}^{-1}$ , il est bien sûr nécessaire de prévoir un dispositif corrigeant les fluctuations dues à la turbulence atmosphérique.