Bilans macroscopiques

Applications directes du cours

$\boxed{1}$ Un liquide incompressible homogène de masse volumique ρ_0 s'écoule de façon uniforme dans une canalisation de section droite S avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$. Donner l'expression du débit massique dans la canalisation.

$\boxed{2}$ Une couche de miel d'épaisseur e et de largeur a, de masse volumique homogène μ_0 s'écoule horizontalement avec un profil des vitesses de la forme $\overrightarrow{v} = v_0\dfrac{z}{e}\overrightarrow{u_x}$. Calculer le débit massique à travers le section de hauteur e et de largeur a.

$\boxed{1}$ $D_m = \rho_0 v_0 S$; $\boxed{2}$ $Dm = \dfrac{1}{2}\rho_0 v_0 a e$.

Exercices

1. Tirage d'une cheminée

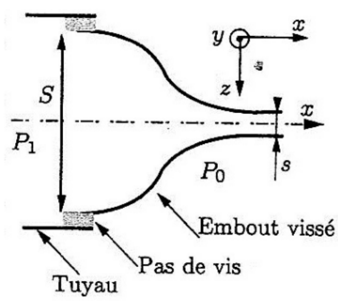
Une cheminée conique de hauteur H a un rayon de $2R$ en bas ($z = 0$) et un rayon de R en haut ($z = H$). La fumée est assimilée à un gaz parfait de masse molaire M. En bas sa température est T_0, sa pression P_0, sa vitesse verticale vers le haut $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_z}$. En haut, sa température est $T_1 = \alpha T_0$, sa pression P_0. Exprimer sa vitesse v_1 en fonction de v_0 et α en régime permanent. Commenter.

2. Confluence

Une rivière de débit massique D_1 et de vitesse v_1 se jette dans un fleuve de débit massique $D_2 = 4D_1$ et de vitesse $v_2 = \dfrac{v_1}{2}$. Les hauteurs d'eau dans la rivière et dans le fleuve avant et après la confluence sont égales à H. La vitesse du fleuve après la confluence est βv_1 et la largeur est la somme des largeurs des deux affluents. Déterminer β.

3. Embout de lance d'incendie

Un tuyau souple, de section S se termine par un embout dont la section terminale $s = 1,0\ \text{cm}^2$ est très petite devant S. On suppose que le fluide (eau) est parfait, homogène, incompressible et que l'écoulement est stationnaire. On néglige l'effet de la pesanteur.
La pression dans le tuyau est $P_1 = 10$ bar et le jet sort dans l'atmosphère à la pression $P_0 = 1,0$ bar.



1. Déterminer la vitesse de sortie du jet v_1
2. Calculer le débit massique D_m.
3. En supposant que le tuyau est maintenu fixe par l'action d'un opérateur, déterminer la force F_{vis} exercée par la vis sur l'embout, à l'aide d'un bilan macroscopique bien choisi.

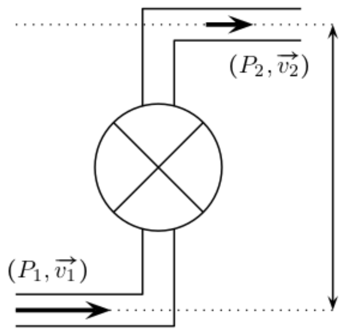
4. Fusée

À l'instant $t = 0$, une fusée de masse totale m décolle verticalement dans le référentiel terrestre. On définit le débit de masse $D_m > 0$ des gaz brûlés par $D_m = -\frac{dm}{dt}$, $m(t)$ désignant la masse de la fusée à un instant $t > 0$ quelconque. On note $\overrightarrow{u} = -u\overrightarrow{e_z}$, avec $u > 0$, la vitesse d'éjection des gaz par **rapport à la fusée**. On note $\overrightarrow{v} = v(t)\overrightarrow{e_z}$ la vitesse de la fusée dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que D_m et u restent constants et que le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ reste uniforme lors du lancement.

1. Effectuer un bilan de quantité de mouvement entre t et $t + dt$, sur le système ayant la masse $m(t)$ à l'instant t.
2. Établir l'équation différentielle :
$$m\frac{dv}{dt} = D_m u - mg$$
3. Identifier, dans le second membre de l'équation précédente, l'intensité F de la force de poussée. À quelle condition la fusée décolle-t-elle ?
4. Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la fusée à l'instant t, en fonction de t, $m(t)$, g, u et de la masse de la fusée à l'instant $t = 0$ notée m_0.

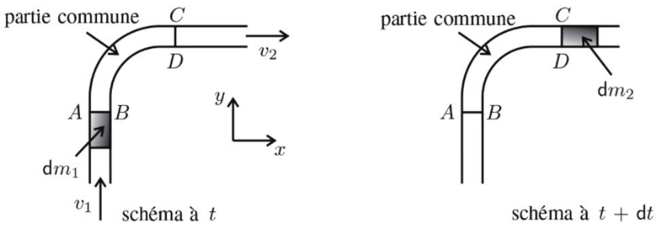
5. Pompe de relevage

On considère l'écoulement parfait. On note $D_v = 1$ L.s^{-1} le débit volumique pour l'écoulement et $\mu = 1$ kg.L^{-1} la masse volumique du fluide supposé incompressible. Le régime est permanent.
Les sections des conduites en amont et en aval sont identiques.
La pression en amont de la pompe est de 1,5 bar de la pompe et la hauteur $h = 20$ m
Déterminer la puissance électrique P de la pompe sachant que son rendement est $\eta = 80\%$ et que l'on souhaite obtenir en sortie une pression de 2 bar.



6. Force exercée par un liquide sur un tuyau coudé

On considère un tuyau coudé horizontal de section S constante. L'écoulement de l'eau est homogène, parfait, permanent et incompressible. On néglige les variations d'altitude dans le tuyau. On appelle v_1 et v_2 respectivement les vitesses à l'entrée et à la sortie du tuyau. On appelle p_1 et p_2 les pressions respectivement à l'entrée et à la sortie du tuyau. On suppose que la pression est uniforme à l'entrée et à la sortie du tuyau.



1. Montrer que $p_1 = p_2$.
2. Exprimer la force exercée par le fluide sur le coude dans le plan horizontal en fonction de μ, D_v, S et p_1.

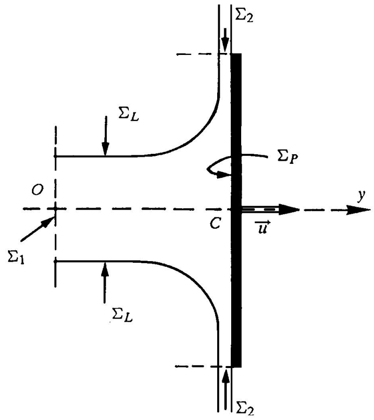
7. Jet sur une plaque mobile

Un jet d'eau cylindrique de révolution, d'axe horizontal Oy vient frapper une plaque schématisée par un disque d'axe Oy et de centre C. Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$, la vitesse de l'eau dans le jet est $\overrightarrow{V_1} = V_1\overrightarrow{e_y}$, tandis que la plaque est animée de la vitesse $\overrightarrow{u} = u\overrightarrow{e_y}$ avec $0 < u < V_1$.

On note ρ la masse volumique de l'eau, Σ_1 la section droite du jet incident, Σ_2 la surface de sortie du jet, Σ_P la surface de la plaque, Σ_L la surface latérale du jet, S_1, S_2, S_P les aires respectives de $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_P$, et P_0 la pression atmosphérique.

On supposera que, sur Σ_2, la vitesse est $\overrightarrow{V_2} = u\overrightarrow{e_y} + V_2'\overrightarrow{e_r}$, où $\overrightarrow{e_r}$ est un vecteur unitaire radial en coordonnées cylindriques d'axe Oy.

On négligera les efforts de pesanteur.

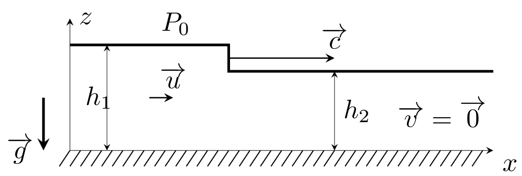


1. (a) Justifier l'expression de $\overrightarrow{V_2}$.
   (b) Déterminer V_2' en fonction de V_1 et u.
   (c) Montrer que la plaque est soumise à une force $\overrightarrow{F} = \rho S_1 (V_1 - u)^2 \overrightarrow{e_y}$.
2. Calculer dans $\mathcal{R}_0$, en fonction de ρ, S_1, V_1 et u :
   - la puissance mécanique $\mathcal{P}_m$ reçue par la plaque ;
   - le débit d'énergie cinétique $\mathcal{P}_{C_1}$ de l'eau à travers Σ_1 ;
   - le rendement $\eta = \mathcal{P}_m / \mathcal{P}_{C_1}$.

   Application numérique : $\rho = 10^3$ kg.m^{-3} ; $V_1 = 120$ m/s ; $u = 40$ m/s ; $S_1 = \pi.10^{-4}$ m^2.

8. Propagation d'une discontinuité de hauteur d'eau dans un canal

Dans un canal rectiligne, de largeur ℓ constante et de fond horizontal, on observe la propagation d'une discontinuité de hauteur d'eau à la vitesse $\vec{c}$, parallèle à direction $x'x$ du canal.
L'écoulement est supposé parfait et incompressible ; l'eau est de masse volumique ρ uniforme.

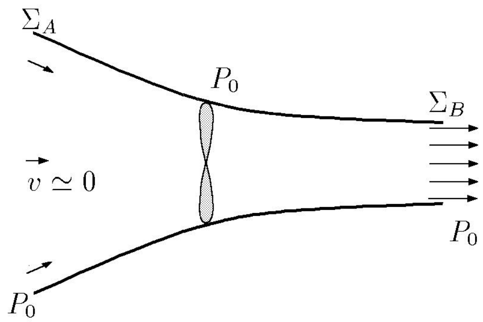


En amont de la discontinuité, la hauteur d'eau est h_1 et la vitesse d'écoulement $\vec{u}$ est uniforme et constante ; en aval, la hauteur d'eau est $h_2 < h_1$, et la vitesse d'écoulement est nulle. La pression au dessus de la surface libre est P_0.

1. Justifier que le champ de pression dans le fluide est, en amont et en aval, le champ de pression d'un fluide en équilibre hydrostatique.
2. En raisonnant sur un système chevauchant la discontinuité, établir par un bilan de quantité de mouvement l'expression de c en fonction de h_1 et h_2.
   Préciser le cas limite $h_1 - h_2 \ll h_2$.
3. Comment seraient modifiés les résultats si la vitesse $\vec{v}$ n'était pas nulle dans la partie aval de la discontinuité ?

9. Étude d'une soufflerie

Une soufflerie est schématisée selon la figure ci-dessous.



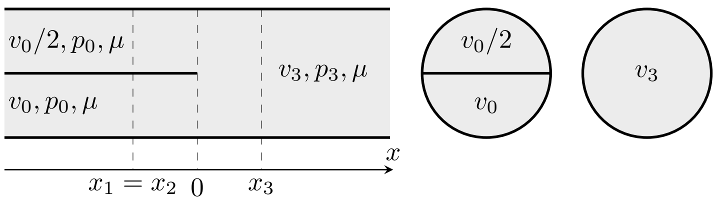
L'air sera supposé incompressible, homogène et parfait, de masse volumique $\rho = 1{,}3$ kg.m^{-3}. La pesanteur sera négligée. Le diamètre de sortie de la soufflerie est $D_B = 0{,}15$ m ; l'air y possède une vitesse $v_0 = 20$ m.s^{-1}. Au niveau de l'hélice, le diamètre est $D = 0{,}40$ m.

1. Déterminer, en fonction de ρ et v_0, la différence de pression $P_2 - P_1$ existant de part et d'autre de l'hélice.

2. Calculer la puissance utile $\mathcal{P}_M$ fournie par la soufflerie.

3. Donner les valeurs numériques de $P_2 - P_1$, $\mathcal{P}_M$ et de la norme F de la force exercée par le fluide sur l'hélice.

10. Homogénéisation d'un écoulement



Une canalisation cylindrique d'axe horizontal $x'x$ et de section S est partagée jusqu'en $x = 0$ en deux canalisations de section $S/2$ (Fig. de gauche) dans lesquelles un même fluide de masse volumique μ s'écoule avec des vitesses uniformes et stationnaires $\overrightarrow{v}_1 = v_0\,\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{v}_2 = (v_0/2)\,\overrightarrow{u_x}$. Les deux écoulements se rejoignent en $x = 0$ et suffisamment loin de $x = 0$, l'écoulement est uniforme et stationnaire de vitesse $\overrightarrow{v}_3 = v_3\,\overrightarrow{u_x}$. On note p_0 la valeur commune de la pression dans les écoulements (1) et (2) et p_3 la pression dans l'écoulement (3).

Les figures de droite donnent les vues en coupe de la canalisation pour $x < 0$ et $x > 0$.

1. Quel phénomène physique est à l'origine de l'homogénéisation des vitesses dans la conduite (3) ?

2. En considérant un système fermé associé au système ouvert $(\mathcal{S})$ constitué à l'instant t du fluide contenu entre une section d'entrée d'abscisse $x_1 = x_2$ où l'écoulement est homogène et une section de sortie d'abscisse x_3 où l'écoulement est homogène, établir les expressions de v_3 et p_3 en fonction de v_0, p_0 et μ.

3. En faisant un bilan énergétique pour le même système fermé, établir l'expression de la puissance des forces intérieures. Commenter.