

# Épreuve de physique I

Lundi 05 janvier : 9h - 13h

## Instructions générales :

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

**L'usage de la calculatrice est autorisé.**

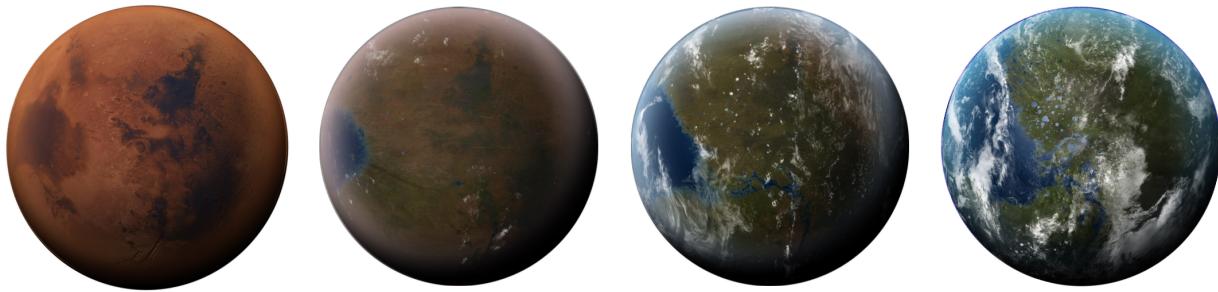
## Barème approximatif :

Partie I : 55%

Partie II : 25 %

Partie II : 20 %

# Terraformation de Mars



**Figure 1** Vue d'artiste des phases hypothétiques de la terraformation de Mars. D'après Wikipédia, auteur : Daein Ballard.

Parue entre 1994 et 2000, la Trilogie de Mars de l'américain Kim Stanley Robinson relate la colonisation et la terraformation de la planète Mars.

La terraformation consiste à modifier la géologie et le climat d'une planète pour la rendre habitable par les humains ou toute forme de vie terrestre. Les modifications profondes à apporter à la planète sont complexes et demandent énormément de ressources. Sur Mars, les faibles température et pression empêchent la vie à la surface. Avant de développer un écosystème, il faut d'abord apporter une atmosphère à même de réchauffer la planète et de supporter la vie. Bien que considérée comme un vieux rêve de science fiction, la faisabilité de la terraformation soulève de nombreuses questions de physique, ce problème en abordant quelques-unes. Le problème comporte trois parties indépendantes. Des données et un formulaire sont regroupés en fin d'énoncé.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par un numéro de question souligné. Il est alors demandé d'expliquer clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

## I. L'atmosphère de Mars et son échappement

Il y a quatre milliards d'années, Mars avait un environnement identique à celui de la Terre : une atmosphère dense était présente et permettait de conserver chaleur et humidité, ce qui participait à rendre cette planète habitable.

Aujourd'hui, Mars n'a quasiment plus d'atmosphère. Elle est devenue une planète froide et désertique. Son atmosphère actuelle est principalement composée (en pourcentages massiques) de dioxyde de carbone (96 %), d'argon (environ 2 %) et de diazote (2 %). Elle comporte également des traces de dioxygène, d'eau et de méthane. La pression moyenne ambiante est environ 170 fois moins importante que sur Terre. À une altitude de référence, au niveau du sol martien, la pression moyenne et la température moyenne sont respectivement de 600 Pa et 210 K. La masse totale de l'atmosphère martienne est estimée à 25 teratonnes (25 000 milliards de tonnes), soit environ 200 fois moins que l'atmosphère terrestre.

Un point  $M$  de l'atmosphère de Mars est repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de centre  $O$ , le centre de la planète, celle-ci étant modélisée par une boule de répartition de masse à symétrie sphérique. On note donc que  $r \geq R_m$ ,  $R_m$  étant le rayon moyen de Mars.

## I. A – Préliminaire : le champ de pesanteur martien

On s'intéresse dans un premier temps à l'évolution du champ de pesanteur martien avec l'altitude. Pour cela, on l'assimile au champ gravitationnel et on raisonne par analogie avec l'interaction électrostatique. Le champ de pesanteur martien est noté  $\vec{g}(M)$  au point  $M$ .

**Q 1.** Expliquer en quoi l'assimilation du champ de pesanteur au champ gravitationnel constitue une approximation.

**Q 2.** Soit deux particules supposées ponctuelles positionnées aux points  $M_1$  et  $M_2$ , portant respectivement les charges  $q_1$  et  $q_2$ . On note  $d$ , la distance entre  $M_1$  et  $M_2$ . Rappeler l'expression de la force d'interaction électrostatique créée par  $q_1$  et agissant sur  $q_2$ . Proposer un schéma associé.

**Q 3.** Par une analogie formelle soignée entre les champs électrostatique et gravitationnel, construire et énoncer le théorème de Gauss gravitationnel (anologue en gravitation du théorème de Gauss de l'électrostatique).

**Q 4.** En déduire, dans l'espace autour de Mars, une expression de l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}(M)$  de cette planète.

**Q 5.** Obtenir une expression de  $\vec{g}(M)$  en fonction de  $R_m$ ,  $r$  et  $\vec{g}_0$ , accélération de la pesanteur au niveau du sol. Déterminer et calculer l'intensité  $g_0$  de cette dernière.

## I. B – L'atmosphère martienne, hors tempêtes de poussières

### I. B – 1 Le modèle de l'atmosphère isotherme

On néglige tout mouvement au sein de l'atmosphère martienne. On l'assimile à un gaz parfait de particules de masse molaire  $M_a$ . On note respectivement  $P(M)$  et  $\mu(M)$  la pression et la masse volumique au point  $M$ . La température de l'atmosphère, supposée uniforme, est notée  $T_0$ . La pression au sol est notée  $P_0$ . On suppose l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}(M)$  radiale et d'intensité uniforme :  $\|\vec{g}(M)\| = g_0$ .

**Q 6.** Rappeler l'expression de l'équivalent volumique des forces de pression dans un fluide, puis établir l'équation locale de la statique des fluides.

**Q 7.** Montrer que la loi de variation de la pression se met sous la forme  $P(r) = C_0 \exp\left(-\frac{r}{H}\right)$  dans l'atmosphère martienne ( $r \geq R_m$ ). Exprimer le facteur  $C_0$  et la hauteur d'échelle  $H$  en fonction de  $P_0$ ,  $M_a$ ,  $g_0$ ,  $R$  et  $T_0$ .

**Q 8.** Déterminer une valeur numérique pour  $M_a$  compte tenu de la composition de l'atmosphère martienne fournie dans l'introduction de cette partie. Puis calculer  $H$ .

### I. B – 2 Déduction de la masse de l'atmosphère martienne

**Q 9.** Expliciter grâce au modèle précédent  $\mu(r)$  en fonction de  $r$ ,  $R_m$ ,  $H$  et  $\mu_0 = \mu(R_m)$ . On précisera l'expression de  $\mu_0$  en fonction de  $P_0$ ,  $M_a$ ,  $R$  et  $T_0$ .

**Q 10.** Montrer que l'expression de la masse totale de l'atmosphère martienne – d'extension infinie dans le modèle étudié – se met sous la forme suivante :  $m_{\text{atm}} = \frac{4\pi P_0}{g_0} [2H^2 + 2HR_m + R_m^2]$ . En déduire une expression approchée, puis effectuer l'application numérique.

### I. B – 3 Une estimation de l'épaisseur de l'atmosphère

La couche la plus externe de l'atmosphère d'un corps céleste est appelée exosphère. L'altitude minimale de l'exosphère, appelée exobase, peut être choisie comme définition de l'épaisseur de l'atmosphère : on la note  $e$ . L'exosphère se définit comme la région de l'atmosphère où la densité de particules est assez faible pour que l'effet des collisions entre particules soit négligeable en comparaison de l'effet de leur cinétique. En particulier, le libre parcours moyen des particules de l'atmosphère y est supérieur à la longueur caractéristique de décroissance de la densité de l'atmosphère.

L'expression du libre parcours moyen d'une particule de l'atmosphère est donnée par  $\ell(M) = \frac{M_a}{a^2 N_a \mu(M)}$ , où  $a$  est la taille typique des molécules formant le gaz et  $N_a$  la constante d'Avogadro.

**Q 11.** Donner l'interprétation physique du libre parcours moyen. En proposer une estimation au niveau du sol martien, que l'on notera  $\ell_0$ . Commenter.

**Q 12.** Exprimer  $e$  en fonction de  $\ell_0$  et  $H$  en utilisant le modèle de l'atmosphère isotherme précédent. En déduire une estimation de l'épaisseur de l'atmosphère martienne. Confronter le résultat à la valeur fournie dans les données en fin d'énoncé.

### I. C – L'échappement de l'atmosphère martienne vers l'espace

En 2013, la NASA a envoyé la sonde MAVEN qui est toujours en activité autour de Mars. Sa principale mission est de mesurer quantitativement le taux de perte des composés atmosphériques qui s'échappent dans le milieu interplanétaire afin de pouvoir extrapoler les taux d'échappement tout au long de l'histoire de la planète. En novembre 2015, l'équipe scientifique de MAVEN a rendu publics des résultats montrant que les gaz atmosphériques s'évaporaient dans l'espace au rythme de  $100 \text{ g.s}^{-1}$  environ.

Les mécanismes ayant conduit l'atmosphère martienne à être ce qu'elle est aujourd'hui ne sont pas bien connus. L'une des hypothèses avancées est que la faible gravité a entraîné la dispersion progressive des gaz légers de la haute atmosphère vers l'espace.

Plusieurs hypothèses ont été proposées pour expliquer la perte de la majeure partie de l'atmosphère, il y a environ 4 milliards d'années. En particulier, Mars aurait perdu son bouclier magnétique permettant au vent solaire de balayer une grande partie de son atmosphère. De plus, d'importantes éruptions volcaniques ou des impacts de météorites auraient éjecté les gaz atmosphériques vers l'espace.

Aujourd'hui encore, d'autres processus continuent de faire évoluer la composition de l'atmosphère martienne. Le phénomène d'échappement atmosphérique décrit la perte des gaz constituant l'atmosphère vers l'espace. Plusieurs mécanismes peuvent contribuer à cet échappement, le principal paramètre d'influence étant la masse de la planète Mars.

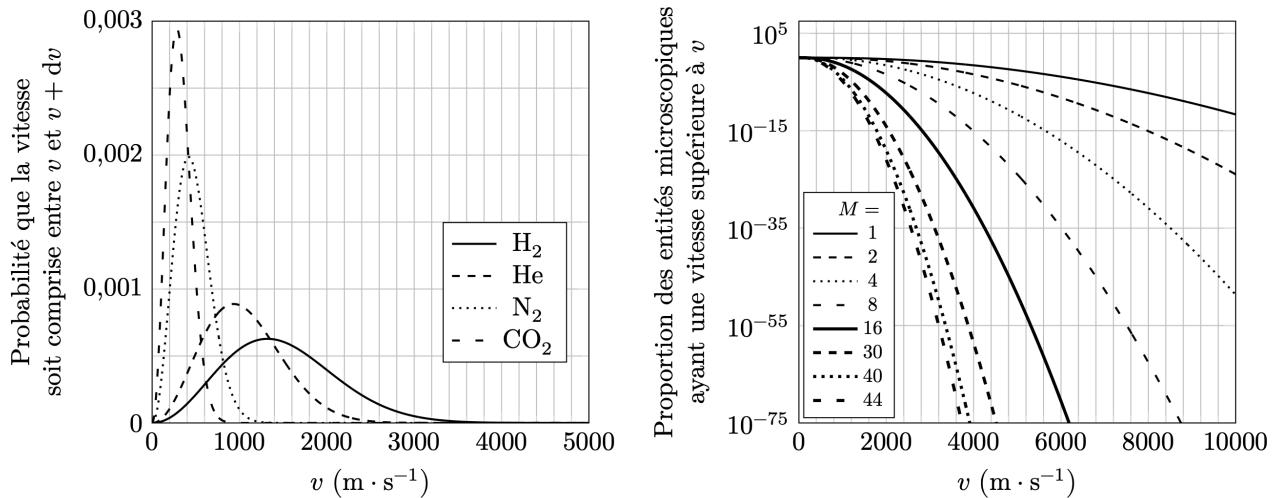
#### I. C – 1 Processus d'échappement de Jeans

L'un des mécanismes d'échappement est celui dit de Jeans. Certaines molécules en provenance des couches atmosphériques inférieures de Mars peuvent subir des réactions chimiques les transformant en atomes neutres (N, H, O, etc). Lorsque ces réactions se produisent près de l'exobase, certains des atomes sont expulsés vers l'exosphère. En effet, dans cette région, la densité est suffisante pour que des collisions se produisent, mais elle est suffisamment faible pour que l'énergie acquise par les particules ne soit pas dissipée dans de nouvelles collisions (thermalisation). Ainsi, ces atomes ont acquis suffisamment d'énergie pour s'échapper dans l'espace interplanétaire : ils ont alors une vitesse supérieure à la vitesse de libération de l'atmosphère.

Ce phénomène peut s'observer également dans une moindre mesure pour les molécules.

**Q 13.** À l'aide des graphes fournis figure 2 et de données numériques dûment justifiées, indiquer quel est le principal élément chimique qui subit l'échappement de Jeans. Conclure. De la même manière, justifier la

composition de l'atmosphère martienne actuelle.



**Figure 2** Gauche : distribution maxwellienne des vitesses, pour la température  $T_0 = 210$  K.

Droite : proportion des entités microscopiques de masse molaire  $M$ , exprimée en  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , ayant une vitesse supérieure à  $v$ .

### I. C – 2 Modèle hydrodynamique de l'échappement

Cet échappement est un cas limite de l'échappement de Jeans. Les particules les plus légères entraînent les plus lourdes dans l'espace interplanétaire. Il a joué un rôle important au tout début de l'histoire de la planète Mars. L'équation de Navier-Stokes dans le contexte d'un fluide autour de la planète Mars est de la forme

$$\mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\vec{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v} - \frac{G \mu m_m}{r^2} \vec{u}_r$$

en tenant compte de la gravitation, explicitée en coordonnées sphériques, où  $\mu$  est encore la masse volumique de l'atmosphère,  $G$  la constante de gravitation universelle et  $m_m$  la masse de la planète Mars.

Pour la suite, on modélise l'atmosphère martienne, là où elle est suffisamment dense, par un gaz parfait en écoulement parfait et stationnaire. On suppose la température uniforme au sein du fluide : elle est égale à la température moyenne  $T_0$  au niveau du sol martien. L'écoulement est considéré unidimensionnel : le champ des vitesses est de la forme  $\vec{v}(M) = v(r) \vec{u}_r$  en coordonnées sphériques avec  $v(r) > 0$ . La pression  $P$  au sein du fluide ne dépend que de la coordonnée radiale  $r$ , ainsi que sa masse volumique  $\mu$ .

On note  $d(r)$  la distance moyenne entre deux particules de l'atmosphère martienne et  $n^*(r)$  la densité volumique de particules.

**Q 14.** Indiquer le lien, en ordre de grandeur, entre  $n^*(r)$  et  $d(r)$ . En déduire une relation entre  $\mu(r)$ ,  $d(r)$ ,  $\mathcal{N}_a$  et  $M_a$ .

**Q 15.** En comparant la distance caractéristique  $d(r)$  entre particules et la taille caractéristique de l'écoulement  $e$ , indiquer dans quelle zone de l'atmosphère martienne ce modèle continu est de nature à donner des résultats pertinents. Dans cette question, on pourra se contenter d'utiliser le modèle de l'atmosphère isotherme en équilibre.

**Q 16.** Déterminer l'équation différentielle reliant les champs  $v(r)$ ,  $P(r)$  et  $\mu(r)$ .

**Q 17.** En déduire, en éliminant le champ de pression  $P(r)$ , une nouvelle équation différentielle ne faisant apparaître plus que les champs des vitesses de l'écoulement  $v(r)$  et de masse volumique  $\mu(r)$  de l'atmosphère.

**Q 18.** Montrer que le produit  $\mu(r)v(r)r^2$  est une constante de l'écoulement modélisé. On ne se préoccupera pas de la valeur de cette constante.

**Q 19.** En déduire que l'équation différentielle vérifiée par  $v(r)$  se met sous la forme :

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \left( \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = 2 \left( \frac{1}{r} - \frac{r^*}{r^2} \right)$$

pour laquelle on exprimera les grandeurs  $c$  et  $r^*$ .

**Q 20.** Vérifier la cohérence des expressions des grandeurs  $c$  et  $r^*$  obtenues à la question précédente en termes de dimensions. Déterminer leurs valeurs numériques.

La distance  $r^*$  correspond à une distance critique dans ce modèle. On adopte pour la suite une approche simplifiée en se concentrant uniquement sur les solutions du problème pour lesquelles  $\frac{1}{v} \frac{dv}{dr}$  ne s'annule pas pour  $r = r^*$ .

On ne se préoccupera pas des autres solutions mathématiques possibles.

**Q 21.** Déterminer  $v(r^*)$ .

Le débit massique d'échappement atmosphérique de Mars, de  $100 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$  environ, a été mesuré par la sonde MAVEN à une altitude de 150 km environ. Elle a également mesuré une masse volumique de  $2 \times 10^{-10} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  à cette altitude.

**Q 22.** Évaluer la contribution hydrodynamique au débit massique d'échappement atmosphérique de Mars donnée par le modèle qui précède. Conclure.

## II. Constitution d'une atmosphère martienne

### II. A – Transfert de masse depuis la ceinture d'Astéroïdes

Pour constituer une atmosphère martienne suffisante, on imagine récupérer la masse nécessaire depuis la ceinture d'astéroïdes. Il s'agit d'une région du Système solaire, distante (en moyenne) de  $r_{\text{ast}}$  du Soleil, située entre les orbites de Mars et de Jupiter. Elle contient des astéroïdes dont la taille varie du grain de poussière au planétoïde de quelques centaines de kilomètres de diamètre. Sa masse totale est estimée à  $3 \times 10^{21} \text{ kg}$ . La composition typique d'un astéroïde (en fractions massiques) est la suivante :

- silicates (dioxyde de silicium,  $\text{SiO}_2$  et autres oxydes métalliques) : 85 % ;
- eau : 11 % ;
- carbone : 2 % ;
- métaux divers : 2 %.

#### II. A – 1 Détermination de la masse d'astéroïdes nécessaire à la constitution d'une atmosphère suffisante

Pour des questions d'habitabilité de la planète, on souhaite se limiter à une pression maximale de 1 bar.

**Q 23.** En se plaçant dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme à l'équilibre, calculer la masse totale de l'atmosphère  $m'_{\text{atm}}$  correspondant à cette valeur limite de pression.

**Q 24.** Estimer la masse d'astéroïdes, notée  $m_{\text{ast}}$ , à déplacer depuis la ceinture d'astéroïdes dans le but de former une atmosphère de masse  $m'_{\text{atm}}$  composée majoritairement de dioxyde de carbone.

## II. A – 2 À propos du transfert d'un astéroïde

On envisage d'amener un astéroïde de la ceinture depuis son orbite circulaire de rayon  $r_{\text{ast}}$  jusqu'à l'orbite martienne, ces deux orbites étant coplanaires. On considère pour la suite l'astéroïde Patientia, de masse  $m_P = 1 \times 10^{19}$  kg, que l'on assimilera à un point matériel  $M$ . On imagine le faire passer par une demi-ellipse de transfert, dite de Hohmann, dont le périhélie  $P$  (point au plus près du Soleil) se trouve sur l'orbite martienne et l'aphélie  $A$  (point le plus éloigné) sur la ceinture d'astéroïdes.

**Q 25.** Réaliser un schéma légendé précisant les orbites et la demi-ellipse de transfert en jeu. Les points  $A$  et  $P$  seront indiqués, ainsi que le centre  $S$  du Soleil.

**Q 26.** Rappeler et justifier les deux lois de conservation usuelles dans le cadre de l'étude mécanique d'un point matériel en mouvement dans un champ de force centrale conservatif.

**Q 27.** Déterminer une expression de l'énergie mécanique  $E_{m1}$  que possède l'astéroïde Patientia, relativement au référentiel héliocentrique d'étude galiléen, lorsqu'il est en orbite circulaire au niveau de la ceinture.

On s'intéresse à présent à la trajectoire de Hohmann. Il s'agit ici de trouver une expression de l'énergie mécanique  $E_m$  de l'astéroïde Patientia en mouvement sur la demi-ellipse correspondante. Le point  $M$  sur cette trajectoire est repéré par ses coordonnées polaires d'origine au centre  $S$  du Soleil.

**Q 28.** Expliciter le vecteur vitesse  $\vec{v}$  du point  $M$  et son vecteur moment cinétique  $\vec{L}$  par rapport au centre  $S$  en coordonnées polaires. Exprimer ensuite le moment cinétique en fonction de la constante des aires notée  $C$ .

**Q 29.** Mettre  $E_m$  sous la forme  $E_m = \frac{1}{2}m_P\dot{r}^2 + E_{\text{eff}}(r)$  et donner l'expression de  $E_{\text{eff}}(r)$ .

**Q 30.** En utilisant le résultat de la question précédente, obtenir la relation donnant l'énergie mécanique  $E_m$  de l'astéroïde Patientia sur la trajectoire de Hohmann en fonction de son demi-grand axe  $a$ , ainsi que de  $G$ ,  $m_P$  et  $m_S$ .

Le passage de l'astéroïde de l'orbite de la ceinture à la trajectoire de Hohmann s'effectue en lui appliquant une brusque variation  $\Delta v$  de la valeur de sa vitesse.

**Q 31.** Indiquer, avec justification, si ce passage correspond à une diminution ou à une augmentation de l'énergie mécanique de l'astéroïde.

**Q 32.** Exprimer  $\Delta v$  en fonction des différentes données de l'énoncé. En faire une application numérique.

On imagine disposer d'un engin à réaction que l'on arrimerait à l'astéroïde Patientia pour réaliser l'opération précédente de brusque variation  $\Delta v$  de la valeur de sa vitesse. Cet engin disposerait d'un propulseur performant capable d'éjecter de la matière à une vitesse  $v_e = 1 \times 10^4$  m·s<sup>-1</sup> par rapport à lui. On néglige la rotation propre de l'astéroïde.

**Q 33.** Montrer, par une approche quantitative, qu'une telle démarche pour effectuer l'opération de transfert de l'astéroïde Patientia sur la trajectoire de Hohmann souhaitée n'est pas vraiment envisageable.

*La faisabilité de la terraformation de Mars continue de faire l'objet de débats et de recherches scientifiques, même si la réussite d'une telle entreprise nécessiterait certainement des efforts considérables.*

### III. Projet d'un avion solaire autonome sur Mars : le Sky-Sailor

Dans cette partie,  $g_0$  et  $g$  désignent l'intensité du champ de pesanteur au sol et à une altitude  $z$ . On note  $(\mathcal{R})$  le référentiel lié au sol martien et  $(\mathcal{R}')$  celui lié aux ailes du Sky-Sailor. Dans toute cette partie III, le Sky-Sailor possède un mouvement de translation rectiligne, horizontal, uniforme à la vitesse  $\vec{V}$  par rapport à  $(\mathcal{R})$ .

Le maintien de l'avion dans l'atmosphère est assuré par une force aérodynamique appelée force de portance  $\vec{F}_P$ .

Cette dernière nait de la circulation de l'atmosphère martienne autour des ailes. Les caractéristiques de cette force sont les suivantes :

- elle est perpendiculaire à la vitesse  $\vec{V}$  de l'avion par rapport à l'atmosphère martienne (supposée immobile) ;
- elle est ascendante ;
- sa norme est  $\|\vec{F}_P\| = F_P = \frac{1}{2}\mu S C_p V^2$  avec  $V = \|\vec{V}\|$ ,  $C_p$  un coefficient sans unité appelé coefficient de portance et  $S$  la surface des ailes.

Dans les conditions de l'expérience, on admet que  $C_p$  est constant et ne dépend que de la géométrie des ailes.

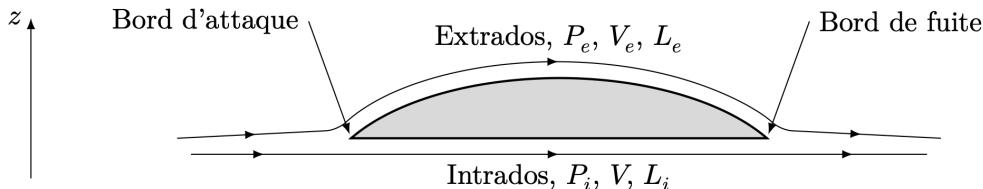
Enfin, localement autour des ailes, on supposera que la masse volumique  $\mu$  de l'atmosphère est constante.

#### III. A – Détermination du coefficient de portance dans le modèle de l'écoulement parfait

On considère une coupe de profil d'une aile du Sky-Sailor (figure 3). La surface extérieure de l'aile est appelée extrados, la surface intérieure intrados. On adopte le modèle très simplifié suivant :

- l'écoulement de fluide autour des ailes est parfait, stationnaire et unidirectionnel ; nous noterons  $L_i$ ,  $P_i$  (respectivement  $L_e$ ,  $P_e$ ) la longueur de l'intrados (respectivement de l'extrados) et la pression immédiatement sous l'aile (respectivement au dessus de l'aile) supposée constante ;
- la vitesse immédiatement sous l'intrados supposée constante est prise égale à  $V$  et on note  $V_e$  la vitesse immédiatement au dessus de l'extrados également prise constante ;
- l'intrados est parallèle au sol.

Dans cette sous-partie III.A, nous travaillerons dans le référentiel  $(\mathcal{R}')$  lié aux ailes.



**Figure 3** Représentation schématique de deux lignes de courant au voisinage de l'intrados et de l'extrados d'une aile du Sky-Sailor

Dans le cadre d'un modèle simple, on admet que tout se passe comme si les particules fluides parcoururent les trajets le long de l'intrados et de l'extrados pendant la même durée.

**Q 34.** Trouver la relation entre  $L_i$ ,  $V$ ,  $L_e$  et  $V_e$ .

**Q 35.** La longueur de l'extrados est plus grande que celle de l'intrados. En négligeant la variation d'altitude de l'aile, montrer qualitativement, à l'aide du théorème de Bernoulli, l'existence de la force de portance.

**Q 36.** En déduire l'expression de l'intensité de la force de portance  $F_P$  s'exerçant sur les ailes en fonction de  $P_i$ ,  $P_e$  et  $S$  puis en fonction de  $\mu$ ,  $S$ ,  $V$ ,  $L_i$  et  $L_e$ .

**Q 37.** En déduire que l'expression du coefficient de portance est  $C_p = \left(\frac{L_e}{L_i}\right)^2 - 1$ .

**Q 38.** Sachant que l'extrados est 2,0 % plus long que l'intrados, calculer numériquement  $C_p$ .

### III. B – Étude mécanique

Dans cette sous-partie III.B, nous travaillons dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ ) supposé galiléen.

On remplace le modèle de l'écoulement parfait décrit précédemment par le modèle d'écoulement visqueux gazeux. L'écoulement de gaz autour des ailes s'accompagne maintenant, en plus de la force de portance, d'une force de frottement fluide appelée trainée  $\vec{F}_t = -\frac{1}{2}\mu S C_t \|\vec{V}\| \vec{V}$ , avec  $C_t$  un coefficient sans unité appelé coefficient de trainée. Nous admettrons ici que le coefficient  $C_t$  est constant.

En sus de ces deux forces aérodynamiques, l'avion est soumis à son poids  $\vec{P}$  et à la force de propulsion  $\vec{T}$  due au système de propulsion (moteur et hélices).

**Q 39.** Faire un schéma des forces s'exerçant sur l'avion. Pour simplifier, on supposera que toutes ces forces s'appliquent au centre de masse  $G$  de l'avion.

**Q 40.** Trouver une relation littérale entre  $P$ ,  $T$  et  $f = C_p/C_t$  la finesse de l'avion.

**Q 41.** On définit la puissance motrice  $P_m$  (puissance mécanique) comme la puissance nécessaire à propulser l'avion dans l'atmosphère. Montrer que cette puissance a pour expression

$$P_m = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{2g^3 M_{av}^3}{\mu C_p S}},$$

**Q 42.** Est-il plus facile sur Mars de voler à basse ou à haute altitude ? Justifier la réponse (comme l'altitude de l'avion demeure faible devant le rayon de la planète, on négligera la variation de l'intensité du champ de pesanteur avec l'altitude).

**Q 43.** Le coefficient de portance du Sky-Sailor vaut :  $C_p = 0,80$  (valeur tabulée que nous conserverons par la suite). Comparer cette valeur à celle trouvée à la question 38. Proposer une explication de la différence entre les valeurs de  $C_p$  calculée et tabulée.

**Q 44.** Calculer numériquement la vitesse  $V$  et la puissance motrice pour un vol à basse altitude ( $z \simeq 0$ ). Comparer cette puissance à celle d'un dispositif du quotidien consommant de l'énergie. Le système de propulsion est-il suffisamment puissant ?

## Données et formulaire

Caractéristiques de la planète Mars :

Rayon moyen de l'orbite martienne autour du Soleil	$r_m$	$2,28 \times 10^8$ km
Rayon moyen de la planète Mars	$R_m$	$3,39 \times 10^3$ km
Masse de la planète Mars	$m_m$	$6,42 \times 10^{23}$ kg
Température à la surface de Mars	$T_0$	210 K
Pression à la surface de Mars	$P_0$	600 Pa
Altitude moyenne de l'exobase (hors tempêtes de poussière)	$e$	$2,20 \times 10^2$ km

Caractéristiques du Soleil :

Rayon moyen du Soleil	$R_S$	$6,96 \times 10^5$ km
Masse du Soleil	$m_S$	$1,99 \times 10^{30}$ kg

Ceinture d'astéroïdes :

$$\text{Rayon moyen de la ceinture d'astéroïdes} \quad r_{\text{ast}} \quad 4,6 \times 10^8 \text{ km}$$

Autres données utiles :

Constante de gravitation universelle	$G$	$6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante des gaz parfaits	$R$	$8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_a$	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Masse molaire du carbone	$M_C$	$12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'oxygène	$M_O$	$16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'argon	$M_{\text{Ar}}$	$40 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'azote	$M_N$	$14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Caractéristique de l'avion Sky-Sailor :

Masse totale de l'avion	$M_{\text{av}}$	2,6 kg
Envergure		3,2 m
Surface $S$ des ailes	$S$	0,78 m <sup>2</sup>
Puissance maximale du système de propulsion		100 W
Coefficient de traînée	$C_t$	$1,3 \times 10^{-2}$

Des opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \overrightarrow{u_\varphi} \\ \text{div } \vec{f} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (f_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \\ [f(r) \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}] (f(r) \overrightarrow{u_r}) &= f(r) \frac{df(r)}{dr} \overrightarrow{u_r} \end{aligned}$$

Quelques intégrales :  $\int_0^\infty u^2 \exp(-u) du = 2$  et  $\int_0^\infty u \exp(-u) du = 1$ .