Épreuve de physique II

Jeudi 08 janvier : 9h - 13h

Instructions générales :

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Première partie

Lutte au sol contre les incendies de forêts

33 000 hectares de forêts sont détruits par des incendies en moyenne chaque année en France. Les départements les plus touchés sont les 15 départements du Sud Est avec 25 600 hectares brûlés en moyenne par an (jusqu'à 62 000 hectares détruits en 2003 !). On y recense 2 450 départs de feu chaque année en moyenne, mais heureusement, 60 % des feux ne dépassent pas 1 ha de forêt détruite. La prévention au sol avec des patrouilles de surveillance et les moyens aériens permettent de limiter grandement les dégâts.

On se propose dans ce problème de découvrir de façon simple deux moyens de lutte contre les incendies de forêt. La première partie permet de mettre en évidence les possibilités des véhicules de patrouille tout terrain, armés pour intervenir sur les départs de feu. Ces véhicules sont parfois appelés véhicules Dangel. La deuxième partie aborde de façon sommaire les possibilités des avions bombardiers d'eau de type Canadair.

Dans tout le problème, l'eau sera considérée comme un liquide non visqueux, homogène, incompressible, de masse volumique ρ. L'air extérieur assimilé à un gaz parfait de température $T_0 = 288$ K de pression $p_0 = 1013$ hPa et de masse volumique ρ_0. On prendra pour l'air, une composition molaire de 20 % en O_2 et de 80 % en N_2 et $\gamma = C_p/C_v = 1,4$. On rappelle la valeur des masses molaires de l'oxygène $M_O = 16 \times 10^{-3}$ kg.mol^{-1} et de l'azote $M_N = 14 \times 10^{-3}$ kg.mol^{-1} ainsi que la valeur de la constante molaire des gaz parfaits $R_{gp} = 8,31$ J.mol^{-1}.K^{-1}. L'accélération de la pesanteur g sera prise égale à $9,81$ m.s^{-2}.

Les véhicules Dangel (voir figure 1) tout terrain sont un élément important de prévention des incendies. Effectuant des rondes quotidiennes dans les massifs forestiers, ils permettent une vigilance renforcée des lieux sensibles et peuvent opérer très rapidement, mais cependant de façon limitée, sur des départs de feu. Pour cela, ils sont équipés d'une citerne, réservoir d'eau supposé parallélépipédique à base carrée, indéformable et posé sur le plateau arrière horizontal du véhicule. La hauteur de ce réservoir est $H = 70$ cm, la longueur du côté de sa base est $L = 95$ cm.

I. Étude du réservoir

Le remplissage du réservoir s'effectue grâce à une ouverture large (diamètre 30 cm) située au sommet du réservoir, fermée par un bouchon à vis. Sur la face arrière, légèrement au dessus du plateau, une ouverture permet plusieurs sorties : d'une part deux sorties auxiliaires avec vanne d'ouverture, d'autre part une sortie par l'intermédiaire d'une motopompe fixée sur le plateau délivrant une puissance maximale $\mathcal{P}_{max}$ de 1170 W (environ 1,6 chevaux) qui permet le branchement et l'actionnement d'une lance. Enfin, au fond du réservoir, est aménagée une sortie pour la vidange, de section s faible.

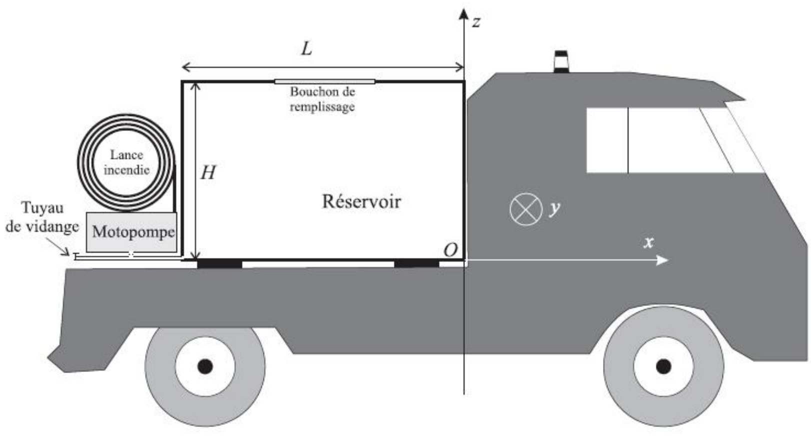

FIG. 1 - Véhicule d'intervention Dangel

Sauf cas particuliers explicités dans le texte, l'espace est rapporté à un système d'axes tels que l'axe Oz est ascendant vertical, l'axe Ox est horizontal, dirigé de l'arrière du véhicule vers l'avant, le point origine O étant choisi sur le plateau au niveau de la paroi arrière du réservoir (voir figure 1).

Q1 - Donner la définition d'une particule fluide, en précisant ses dimensions typiques. À quelle échelle d'étude se situe-t-elle ? Quel est son intérêt ? Qu'appelle-t-on en mécanique des fluides, un système ouvert, un système fermé ?
Rappeler les conditions d'application de la relation de Bernoulli.

Q2 - Le réservoir, initialement vide, toutes les sorties étant fermées, est partiellement rempli grâce à une borne à incendie en 1 min 29 s avec un débit moyen estimé à 6,6 litres par seconde. Déterminer la hauteur h_0 de l'eau dans le réservoir après remplissage. On négligera le volume du tuyau de vidange. On se place dans ces conditions de remplissage préalable dans toute la suite du problème.

Q3 - On souhaite déterminer la résultante des forces de pression qui s'exerce sur chaque flanc vertical du réservoir.

a) Rappeler l'équation fondamentale de la statique des fluide.
b) En déduire la loi de l'hydrostatique puis l'expression de P en fonction de P_0, ρ, g et z.
c) Pour un flanc du réservoir déterminer la résultante des forces pressantes s'exerçant sur la surface $\mathrm{d}S$ de largeur L et de hauteur $\mathrm{d}z$ (Penser aux deux côtés de la paroi !).
d) En déduire la résultante des forces de pression qui s'exerce sur chaque flanc vertical du réservoir.

Q4 - Le centre de poussée est le point d'application de la résultante des forces de pression qui donnerait le même moment par rapport à un point donné que le moment résultant des forces élémentaires de pression par rapport à ce même point. Déterminer la hauteur du centre de poussée de cette résultante sur un flanc vertical.

Q5 - On suppose que le véhicule démarre avec une accélération constante $\overrightarrow{a} = a\hat{e}_x$, sur une route horizontale d'axe Ox.

a) Faire un bilan des forces d'exerçant sur une particule de fluide dans le référentiel du véhicule.
b) Dans ce référentiel l'eau est supposée être en équilibre. En déduire l'expression de $P(x, z)$ au sein de l'eau en fonction de ρ, g, a, z et à une constante près.
c) Déterminer les équations des surfaces isobares dans l'eau du réservoir.
d) Sachant que le point milieu de la surface libre du réservoir est toujours à la hauteur h_0, calculer la valeur numérique de l'amplitude maximale de variation de hauteur de la surface libre lors d'une phase d'accélération de 1 $\mathrm{m.s^{-2}}$.
e) En négligeant la contribution de la pression atmosphérique p_0, déterminer la résultante des forces exercées par l'eau sur le réservoir (astuce : penser aux actions réciproques).

II. Vidange du réservoir

Le véhicule, à l'arrêt, est laissé en plein soleil en été, durant un certain temps ; la température de l'air à l'intérieur du réservoir s'élève à $\mathrm{T} = 40^o\mathrm{C}$. La hauteur initiale d'eau est h_0 calculée à la question 2, on suppose que la température de l'air reste constante durant toutes les opérations. L'air contenu dans le réservoir est assimilé à un gaz parfait.

On souhaite tout d'abord étudier le cas hypothétique d'une vidange pour laquelle on laisserait le bouchon de remplissage en place et dans laquelle le tuyau de vidange n'est pas mis en place.

Q6 - Déterminer la pression p_i de l'air contenu dans le réservoir à l'instant où la vidange débute. Montrer que le réservoir se vide partiellement et que la hauteur d'eau h restant alors dans le réservoir est régie par une équation du second degré. Déterminer la valeur numérique de h, le volume d'eau ainsi vidangé et la pression finale p_f de l'air à l'intérieur du réservoir. Que risque-t-il de se passer si l'on procède ainsi ?

En pratique, on retire en fait le bouchon de remplissage et l'on branche un tuyau de vidange de section s faible disposé horizontalement, d'axe Ox, de longueur $\ell = 80$ cm fermé à son extrémité par un robinet.

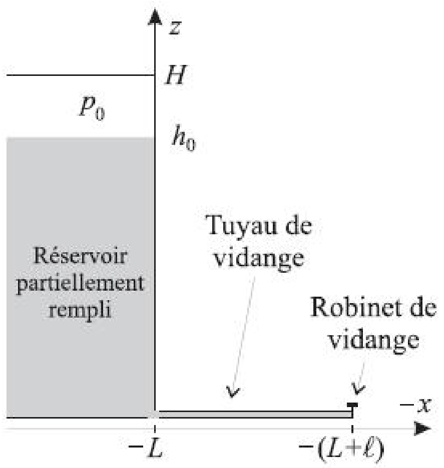

FIG. 2 - Vidange réservoir

L'ensemble est représenté sur la figure 2. On ouvre le robinet de vidange à $t = 0$, la hauteur d'eau dans le réservoir, au dessus du niveau du tuyau, étant de h_0. On étudie dans un premier temps le régime transitoire pendant lequel on admet que la hauteur d'eau dans le réservoir reste constante et égale à h_0. On s'intéresse au champ de vitesse de l'eau dans le tuyau de vidange, noté $\vec{v}(x,t)$ et supposé uniforme sur chaque section.

Q7 - Montrer que $v(x,t) = -v(t)\hat{e}_x$ avec $v(t) \geq 0$.

Q8 - L'équation d'Euler de la mécanique des fluides peut s'écrire

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\, v^2 - \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(p) + \rho\vec{g}.$$

En intégrant l'équation d'Euler le lond d'une ligne de courant entre la surface libre du fluide et l'orifice (au niveau du robinet de vidange), montrer que, la fonction $v(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\ell\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} = k^2. \qquad (1)$$

où k^2 est une constante que l'on exprimera en fonction de g et h_0.

Q9 - Montrer que l'équation précédente admet une solution constante v_0. En posant $w = \dfrac{1}{v+v_0}$ déterminer l'équation différentielle qui régit w. La résoudre (on prendra $v(0) = 0$). Exprimer $v(t)$ en fonction des paramètres v_0 et $\tau = \dfrac{\ell}{\sqrt{2}k}$.
Déterminer la limite v_1 de v lorsque t tend vers $+\infty$.

Q10 - Calculer la valeur de τ et du temps t_0 au bout duquel la différence relative entre la vitesse v et sa valeur limite v_1 devient inférieure à 1%.

Q11 - En précisant les hypothèses utilisées, déterminer le temps nécessaire t_v à la vidange totale du réservoir. Calculer t_v sachant que le tuyau possède un diamètre $\delta = 20$ mm.

III. Fonctionnement de la lance à incendie

On s'intéresse maintenant au fonctionnement de la lance à incendie branchée sur la motopompe. La lance a une longueur de 50 m, son diamètre intérieur est $d_1 = 32$ mm et elle se termine par un petit embout conique dont le diamètre minimal intérieur est $d_2 = 14$ mm. On se place en régime permanent, le débit volumique de la motopompe est noté D_v et on néglige toutes les pertes de charges.

Q12 - À partir d'un bilan d'énergie, montrer que la puissance $\mathcal{P}$ que doit fournir la motopompe s'écrit dans le cas général :

$$\mathcal{P} = \rho D_v\left[\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) + \frac{p_s - p_e}{\rho}\right]$$

où les grandeurs indicées "s" correspondent aux grandeurs de sortie et celles indicées "e" aux grandeurs d'entrée du système choisi.

Q13 - L'embout de la lance est maintenu à 20 m au dessus du plateau du véhicule.

a) Exprimer les vitesses d'entrée et de sortie en fonction du débit volumique.

b) Établir une équation de degré 3 liant le débit maximal $D_{v_{max}}$ à la puissance maximale de la pompe.

Une résolution numérique nous donne $D_{v_{max}} = 3,0$ L.s^{-1}.

c) En déduire la vitesse maximale de l'eau en sortie de lance.

Q14 - À partir d'un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force $\overrightarrow{F}_e$ exercée par l'eau sur l'embout conique de la lance lorsque cette dernière est horizontale. Calculer la valeur numérique du module de cette force pour le débit $D_{v_{max}}$ obtenu à la question précédente.

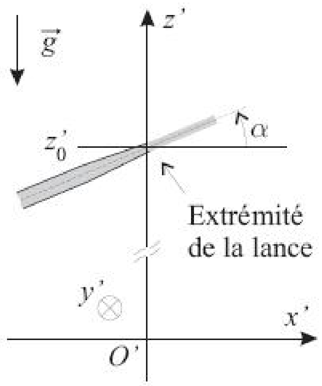

FIG. 3 - Configuration de l'extrémité de la lance

On se place dorénavant dans un référentiel $\mathcal{R}' = (O', x', y', z')$ représenté sur la figure 3, supposé galiléen, dans lequel l'extrémité de la lance est inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale et se situe à la cote $z'_0 = 1$ m.

On négligera la résistance de l'air et on fera l'hypothèse que le jet dont on néglige la section reste cohérent dans le plan $O'x'z'$.

Q15 - Déterminer l'équation $z' = z'(x')$ de la trajectoire des particules d'eau. On utilisera les paramètres $g, \tan\alpha, z'_0$ et v_s module de la vitesse initiale de ces particules.

Q16 - Déterminer la portée maximale x'_{max} de la lance en fonction de v_s, g et z'_0. Calculer la valeur numérique de x'_{max} et de l'angle correspondant pour un débit $D_v = 180$ litres par minute.

Deuxième partie

Vol d'une balle de golf

On notera $\dot{X}$ et $\ddot{X}$ les dérivées temporelles première et seconde d'une fonction $X(t)$ quelconque.

La tête d'un club de golf est assimilable à une surface plane dont l'inclinaison avec la verticale varie en fonction du type de club. L'impact de cette surface avec la balle est un phénomène très violent et très bref. Typiquement, lors d'un coup frappé avec un club de type "driver" (vitesse de la tête de club d'environ $50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$), la balle passe d'une vitesse initiale nulle à environ $70\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ à la fin du contact avec la tête, qui dure 0,50 ms. Cependant l'inclinaison de la tête de club entraîne un glissement de la balle le long de celle-ci pendant l'impact, ce qui conduit à une mise en rotation de la balle. Ainsi une balle frappée avec un "driver" quitte le sol en effectuant de l'ordre de 60 rotations par seconde. Dans le cas d'un coup sans aucun "effet" l'axe de rotation de la balle est horizontal et perpendiculaire à sa vitesse à la sortie du club.

On s'intéresse à l'effet de la rotation de la balle sur sa trajectoire aérienne. Pour cela, on effectue un changement de référentiel en se plaçant dans un référentiel où le centre de la balle est immobile et l'air en écoulement. On considérera ce référentiel galiléen pour l'étude de l'écoulement de l'air.

L'air est en écoulement parfait, stationnaire, irrotationnel, homogène et incompressible et on notera ρ sa masse volumique. On néglige la gravité.

Afin de mettre en évidence l'importance de la rotation, on s'intéresse à un modèle d'écoulement autour d'un cylindre de longueur infinie, de rayon R, animé d'un mouvement de rotation autour de son axe (Oz) fixe, avec un vecteur-rotation $\overrightarrow{\Omega} = \Omega \overrightarrow{u}_z$ dans le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ galiléen.

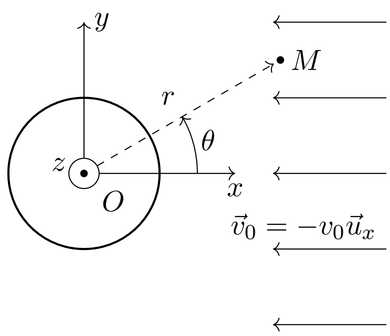

Figure 4

Loin du cylindre, en amont de celui-ci, l'écoulement a une vitesse uniforme, $\vec{v}_0 = -v_0\vec{u}_x$, avec v_0 constante et positive. On repère un point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz).

Q1 - De quelles variables (r, θ, z et t) le champ de vitesse $\vec{v}$ dépend-il ?

Q2 - Quelles sont les deux conditions aux limites vérifiées par $\vec{v}$?

On définit le potentiel des vitesses φ associé à l'écoulement par $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \varphi$ et on admet que

$$\varphi(r, \theta) = \left(-v_0 r - \frac{p}{2\pi r}\right) \cos\theta + R^2 \Omega \theta$$

où p est une constante qui sera définie dans la suite.

Q3 - Justifier l'introduction du potentiel des vitesses φ.

Q4 - Donner les expressions des composantes du champ de vitesse v_r et v_θ.

Q5 - Vérifier les conditions aux limites et en déduire p en fonction de R et v_0.

Q6 - En déduire le champ de pression $P(r = R, \theta)$ à la surface du cylindre, en fonction de ρ, R, Ω, v_0, θ et P_0 (valeur de la pression loin du cylindre, considérée uniforme).

Q7 - En déduire, à l'aide d'un schéma clair et d'arguments de symétrie, que la résultante $\vec{F}_p$ des forces de pression a une composante nulle selon $\vec{u}_x$.

Q8 - En raisonnant sur une portion de cylindre de hauteur h, déterminer la force de pression $\vec{F}_p$ selon $\vec{u}_y$ et mettre finalement $\vec{F}_p$ sous la forme $\vec{F}_p = \alpha \vec{v}_0 \wedge \vec{\Omega}$ en exprimant la constante α en fonction des données. On pourra utiliser $\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0$ et $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$.

Q9 - Applications
On admet que le résultat ci-dessus se transpose à une balle de golf, à condition de prendre pour le coefficient α une valeur appropriée.

(a) Commenter la direction et le sens de la force $\vec{F}_p$ selon que le golfeur a correctement frappé la balle ($\Omega > 0$)... ou a totalement raté son coup ($\Omega < 0$).

(b) Calculer la norme de cette force au départ d'un coup de "driver" : $\Omega = 3{,}8 \times 10^2$ rad $\cdot$ s^{-1}, $v_0 = 70$ m $\cdot$ s^{-1} et $\alpha \approx 1{,}5 \times 10^{-5}$ (S.I.). Commenter, sachant que la balle a une masse $M_b = 46$ g.

(c) Que risque le golfeur si, à cause d'un swing imparfait, le vecteur-rotation n'est pas tout à fait porté par $\vec{u}_z$?

(d) Quel phénomène négligé ici faudrait-il prendre en compte pour une description complète des forces subies par la balle ? Quelle est sa conséquence sur la vitesse et la rotation de la balle au cours de son vol ?

Troisième partie

Contrariétés expérimentales

Le fait de n'avoir pas suffisamment réfléchi aux propriétés physiques des systèmes ou à l'influence des capteurs de mesure sur l'objet de la mesure, réserve parfois quelques surprises à l'expérimentateur. Les questions qui suivent, toutes indépendantes les unes des autres, se présentent comme un test de bon sens physique. Elles ne demandent, tout au plus, que de brefs calculs.

I. Un voltmètre récalcitrant !

Une source de tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 240$ V est branchée aux bornes de deux résistances en série, toutes deux égales à $R = 10$ MΩ (Figure 1).

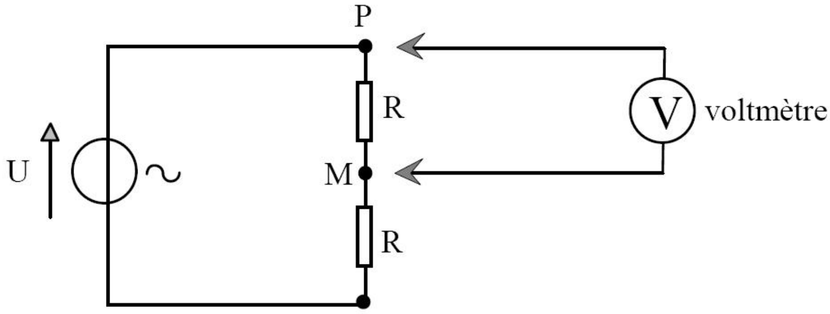

Figure 1

Q1 - Calculer la valeur efficace des tensions U_{MN} et U_{PM} entre les nœuds nommés, en l'absence de voltmètre.

Q2 - Pour effectuer la mesure de ces tensions, on utilise un voltmètre de résistance interne égale à $r = 10$ MΩ. Indiquer la tension lue sur le voltmètre lorsqu'on le branche successivement : entre M et N, entre P et M puis entre P et N.

Q3 - Conclure.

II. Un oscilloscope perturbant !

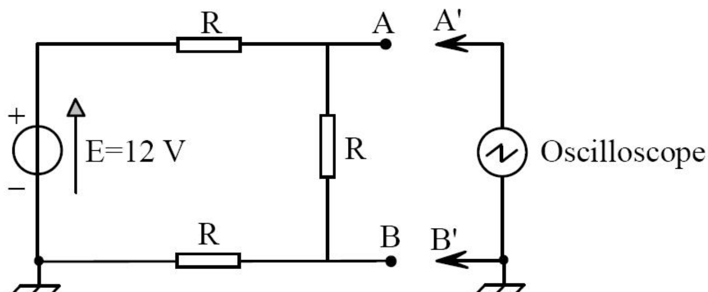

Figure 2

Une source de tension $E = 12$ V alimente trois résistances égales R disposées en série (Figure 2).

Q4 - Calculer la tension entre les bornes A et B dessinées sur le schéma.

Pour mesurer cette tension on utilise l'oscilloscope dessiné sur la même Figure 2, borne A' reliée à la borne A et borne B' reliée à la borne B. Cet oscilloscope a une impédance interne très supérieure à la résistance R et pourtant la tension qu'il mesure n'est pas celle qui a été calculée.

Q5 - Expliquer pourquoi et donner la valeur de la tension mesurée.

III. Une diode en danger !

Un générateur de tension continue égale à 12 volts , une diode orientée dans le sens passant et un condensateur de capacité $C = 10\ \mu$F sont montés en série (Figure 3a).

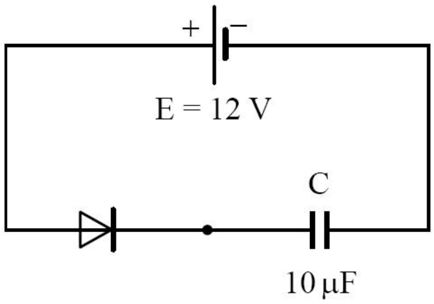

Figure 3a

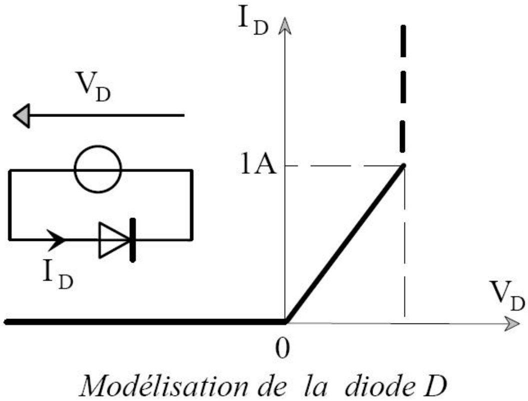

Figure 3b

La caractéristique de la diode est donnée (Figure 3b). Celle-ci se comporte dans le sens direct comme une résistance de valeur $R_D = 0,6\ \Omega$: dans la limite d'un courant de 1 A , au-delà duquel elle est détruite.

Q6 - En l'état du montage, supposé en régime stationnaire depuis un temps suffisamment important, quelle est la valeur du courant ?

Q7 - Cependant, le condensateur étant initialement non chargé, la diode est détruite lors du branchement. Expliquer pourquoi.

Q8 - Quelle résistance minimale doit-on monter en série avec la diode pour la protéger ?

IV. Un oscilloscope en danger !

Une source de tension continue $E = 12$ V alimente, à travers un interrupteur fermé (AB), un bobinage assimilable à une auto-inductance $L = 1$ H en série avec une résistance $R = 100\ \Omega$ (Figure 5a).

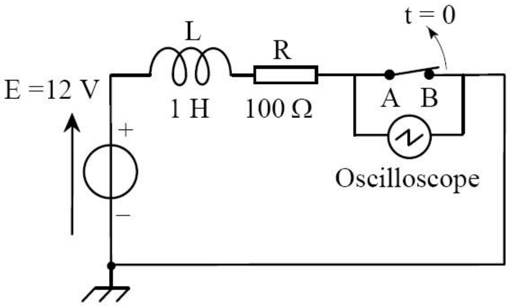

Figure 5a

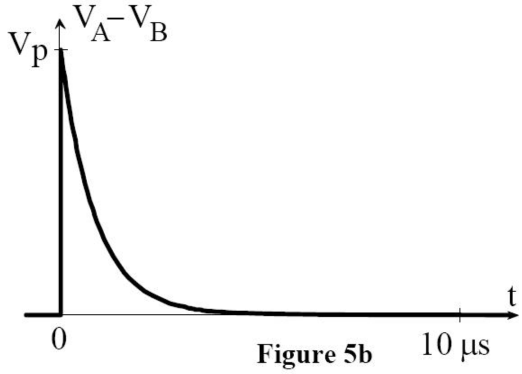

Figure 5b

Q9 - Quelle relation existe-t-il entre la tension aux bornes de l'auto-inductance et le courant dans celle-ci. En déduire ce qui est à prévoir en cas d'interruption instantanée du courant.

Q10 **-** Un expérimentateur imprudent connecte un oscilloscope aux extrémités A et B de l'interrupteur afin d'observer l'impulsion de tension qui apparaît aux bornes du contact lorsqu'on l'ouvre brutalement, au temps $t = 0$ (Figure 5b). La notice de l'oscilloscope indique que la résistance d'entrée de celui-ci mesure 1 MΩ et que la tension maximale admissible est de 400 volts.
— Quelle était l'intensité du courant circulant en régime permanent, avant l'ouverture du contact, au temps $t = 0^-$?
— Par un raisonnement simple, bien argumenté, déterminer la valeur de la tension V_p atteinte au pic de l'impulsion, au temps $t = 0^+$. En effectuer le calcul numérique puis conclure.

Q11 **-** On peut se protéger de cet effet de surtension à l'aide d'une diode. Comment doit-on la brancher ? En justifier le comportement.